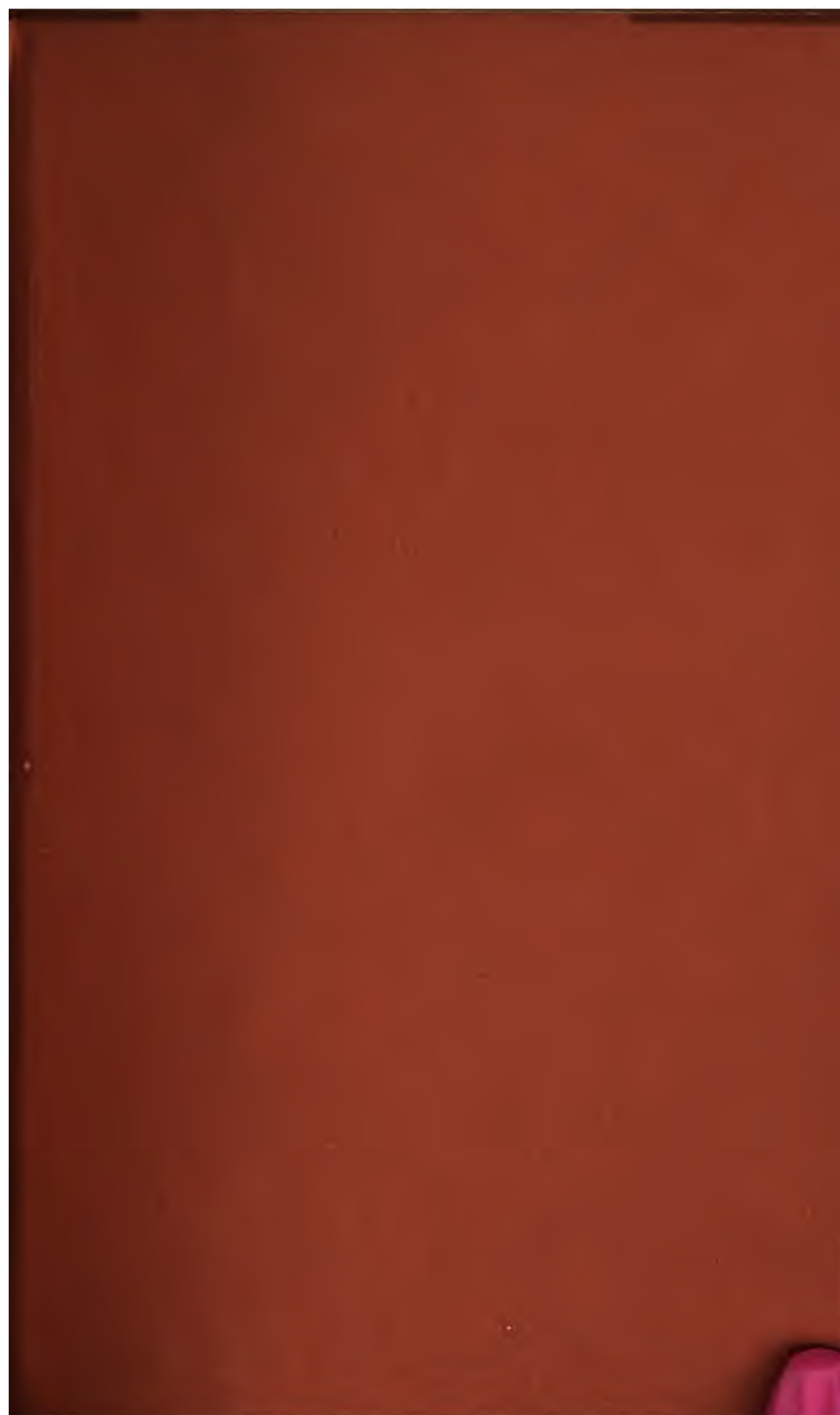






GRUNDRISS

DER

VARIATIONSRECHNUNG.

GRUNDRISS

DER

VARIATIONSRECHNUNG.

VON

DR. J. DIENGER,
Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe,
auswärtigem Mitgliede der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften
zu Prag.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1867.

VORREDE.

Die vorliegende Schrift behandelt die Variationsrechnung für Funktionen einer unabhängig Veränderlichen in einer von der herkömmlichen verschiedenen Weise. Zunächst wird nämlich *der Fall, da* nur der erste Differentialquotient unter dem Integralzeichen vorkommt, ganz allgemein abgehandelt und von da aus zu den allgemeinsten Sätzen übergegangen. Dann ist aber auch der ganze verwirrende Ballast der Grenzgleichungen fortgefallen, an deren Stelle die Betrachtungen des §. 6 und der ähnlichen späteren getreten sind. Ich glaube, dass dadurch die ganze Theorie an Einfachheit gewonnen hat. Dabei aber lag eine weitere Aufforderung zu dieser Auffassung in der Nothwendigkeit, jeweils entscheiden zu können, ob auch wirklich ein Maximum oder Minimum vorhanden sei, welche Entscheidung in der allgemeinsten Weise durchgeführt wurde.

Somit glaube ich für Funktionen einer unabhängig Veränderlichen die Theorie zum endgiltigen Abschluss geführt zu haben, was selbst in dem Moigno-Lindelöf'schen Werke nicht geschah. Die Aufgaben sind ziemlich zahlreich und fast ausschliesslich aus dem Gebiete der Anwendung gewählt. Wie sonst auch, habe ich in dem jetzigen Buche die Literatur des Gegenstandes kaum berührt. Wer darüber Auskunft wünscht, findet sie in reichstem Maasse in „A History of the Progress of

the Calculus of Variations during the nineteenth Century. By J. Todhunder. Cambridge and London. 1861".

Als besondere Werke über die Variationsrechnung führe ich an:

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, seu solutio problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti. Auct. L. Euler. Lausannae et Genevae 1744.

Analytische Darstellung der Variationsrechnung mit Anwendung derselben auf die Bestimmung des Grössten und Kleinsten. Von Dirksen. Berlin 1823.

Die Lehre vom Grössten und Kleinsten. Von Ohm. Berlin 1825.

Theorie und Anwendung des sogenannten Variationscalculs. Von Strauch. Zürich 1849.

An elementary treatise on the Calculus of Variations. By Jellet. Dublin 1850. (Deutsch von Schnuse. Braunschweig 1860.)

Lehrbuch der Variationsrechnung und ihrer Anwendung bei Untersuchungen über das Maximum und Minimum. Von Stegmann. Cassel 1854.

Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral. Tome IV. Calcul des Variations. Par Moigno et Lindelöf. Paris 1861.

Karlsruhe, im Juni 1867.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNISS.

Erster Abschnitt.

Eine Funktion einer einzigen abhängig Veränderlichen wird gesucht.

Zweiter Abschnitt.

Relative Maxima oder Minima.
(Isoperimetrische Aufgaben.)

Dritter Abschnitt.

Mehrere Funktionen derselben unabhängig Veränderlichen werden gesucht.

Vierter Abschnitt.

Entscheidung, ob Maximum oder Minimum.

Fünfter Abschnitt.

Beispiele zu den zwei vorhergehenden Abschnitten.

Erster Abschnitt.

Eine Funktion einer einzigen abhängig Veränderlichen wird gesucht.

§. 1.

Stellung der Aufgabe.

I. Angenommen, in einer Ebene seien zwei Punkte gegeben, deren Abszissen a und b (bei rechtwinkeligen Koordinaten) seien, und man soll zwischen diesen Punkten in der Ebene eine Kurve ziehen, deren durch jene zwei Punkte begrenzter Bogen kleiner sei als der eben so begrenzte Bogen irgend einer anderen solcher Kurven.

Ist allgemein y die Ordinate irgend einer der unzählig vielen möglichen Kurven, die alle durch die beiden Punkte gehen, so ist die Länge des Bogenstückes:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

wo wir allerdings voraussetzen, es sei $b > a$, und in der ganzen Ausdehnung wachse der Kurvenbogen mit wachsendem x. Dies dürfen wir aber in unserer Aufgabe sicherlich, da Kurven, welche eine Zurückbiegung erleiden, dieselbe nicht lösen können.

Ist y als Funktion von x bestimmt, so ist damit die Kurve selbst bestimmt, so dass wir also aussprechen dürfen, es solle in (a) die Funktion y so bestimmt werden, dass für dieses y der Werth von (a) geringer sei als für ein anderes.

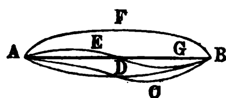
Den Grundbegriffen der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen zufolge werden wir aber mit der gesuchten Kurve nur solche

vergleichen, die **wenig** von ihr abweichen, und es muss für die gesuchte der Kurvenbogen kürzer sein, als für die so mit ihr verglichenen.

Es wäre natürlich denkbar, wenn es auch in der vorliegenden Aufgabe thatsächlich nicht so ist, dass einer bestimmten Kurve die Eigenschaft des Minimums zukommt; dass dann, wenn man nach einander benachbarte, nur je der Form nach wenig verschiedene, betrachten würde, endlich einer die Eigenschaft des Maximums zukäme, u. s. w.

II. Wir haben eben gesehen, dass es sich darum handelt, für eine Kurve andere wenig der Form nach von ihr verschiedene zu setzen, und sie mit jener zu vergleichen. Analytisch gesprochen müssen wir also mit der gesuchten (vorläufig noch unbekannten) Funktion y nur solche vergleichen, deren Werthe, bei demselben x, sehr wenig abweichen von ihr, dieses Wenige aber in willkürlicher Weise. Dies ist nur denkbar, wenn man für y andere **Funktionsformen** wählen kann, die immer willkürlich bleiben.

Fig. 1.



Stellt AGB, Fig. 1, die gesuchte Kurve vor, so sind etwa mit ihr zu vergleichen: ACB, ADB, AEB, AFB, u. s. w.

§. 2.

Darstellung der Formänderung.

I. Wie wir oben sahen, handelt es sich vor Allem darum, zu untersuchen, in welcher Weise sich die gewünschte Formänderung analytisch darstellen lasse. Zunächst ist es nun leicht, eine Funktion **zweier** Grössen: x und ε herzustellen, welche für

$$\varepsilon = 0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

die Formen

$$\varphi(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots \psi_n(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

annimmt. Ist nämlich

$$f(\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2) \ldots (\varepsilon - \varepsilon_n),\ \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon - \varepsilon_r} = f_r(\varepsilon) \quad \text{(c)}$$

so wird

$$z = \varphi(x)\frac{f_0(\varepsilon)}{f_0(0)} + \psi_1(x)\frac{f_1(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon_1)} + \cdots + \psi_n(x)\frac{f_n(\varepsilon)}{f_n(\varepsilon_n)} \ldots \text{(d)}$$

jenen Bedingungen genügen, wie man sich leicht überzeugen kann.

Die Grösse z ist ersichtlich eine stetige Funktion von ε, die für die oben in (a) angeführten Werthe die in (b) gegebenen liefert; für Werthe von ε, die zwischen den erst genannten liegen, werden somit auch Werthe von z (in x) folgen, die wir gewissermaassen ebenfalls als zwischen den in (b) aufgeführten liegend ansehen dürfen.

Uebrigens giebt es noch viele andere Formen von $f(\varepsilon)$, die man statt der (c) benutzen könnte. So etwa dürfte man statt ε, $\varepsilon - \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon - \varepsilon_n$ in (c) auch setzen: $\sin \varepsilon, \sin(\varepsilon - \varepsilon_1), \ldots, \sin(\varepsilon - \varepsilon_n)$, u. a. m.

II. Hieraus geht wohl schon hervor, dass man sich immer eine Funktion zweier Veränderlichen, x und ε, denken könne, die durch

$$\psi(x, \varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

mag bezeichnet sein, welche die Eigenschaft hat, für $\varepsilon = 0$ zu einer bestimmten Funktion $\varphi(x)$ von x zu werden; für andere Werthe von ε aber ganz andere Funktionen zu liefern und bei stetiger Aenderung von ε die Funktion von $\varphi(x)$ stetig in andere umzubilden.

Denkt man sich (e) nach dem Mac-Laurin'schen Satze entwickelt, so hat man

$$\psi(x, \varepsilon) = \psi(x, 0) + \varepsilon\psi'(x, 0) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\psi''(x, 0) + \cdots,$$

wo die Differenzirungszeichen sich natürlich auf ε beziehen. Hier werden die Koeffizienten von $\varepsilon, \frac{\varepsilon^2}{1.2}, \cdots$ ganz willkürliche Funktionen von x sein.

Ohnehin ist es sehr leicht, eine Funktion $\psi(x, \varepsilon)$ anzusetzen, so beschaffen, dass sie selbst und ihre n ersten Differentialquotienten nach ε für $\varepsilon = 0$ die willkürlichen Funktionen

$$\varphi(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$$

werden. Dieselbe könnte etwa sein:

$$\psi(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{1}\psi_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\psi_2(x) + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{1\ldots n}\psi_n(x)$$
$$+ \frac{\varepsilon^{n+1}}{1\cdots n+1} f(x, \varepsilon),$$

wo $f(x, \varepsilon)$ irgend eine beliebige Funktion ist, welche nur der Bedingung unterworfen ist, dass sie selbst und ihre n ersten Differentialquotienten nach ε für $\varepsilon = 0$ endlich bleibt.

III. Ist also $y = \varphi(x)$ die Auflösung der in §. 1, I. gestellten Aufgabe, so werden wir statt y in dem dortigen Ausdrucke (a) setzen $\psi(x, \varepsilon)$, mit der Bedingung, dass $\psi(x, 0) = \varphi(x)$; der so erhaltene

Ausdruck muss dann, bei kleinem ε, mehr sein, als für $\varepsilon = 0$, d. h. der neue Werth (des Bogens) muss ein Minimum sein für $\varepsilon = 0$.

Lässt man, insofern nicht ganz besondere Bedingungen obwalten, $\psi(x, \varepsilon)$ durchaus willkürlich (mit der einzigen Bedingung für $\varepsilon = 0$), so ist sofort zu ersehen, dass man alle möglichen Nachbarkurven erreichen kann, also die Aufgabe richtig gelöst ist *).

IV. Statt y durch $\psi(x, \varepsilon)$, d. h. eine geschlossene Funktionsform zu ersetzen, kann man auch nach II. die Reihenform anwenden. Dann setzt man für y:

$$y + \frac{\varepsilon}{1}\delta y + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\delta^2 y + \cdots \cdots \quad \text{(f)}$$

wo y die gesuchte Funktion, δy, $\delta^2 y$, ... ganz beliebige Funktionen von x sind, die man erste, zweite, ... Variation von y nennt.

Ist $y' = \frac{dy}{dx}$ und man setzt für y: $\psi(x, \varepsilon)$, so hat man für y' natürlich zu setzen: $\frac{d\psi(x, \varepsilon)}{dx}$. Wählt man statt der geschlossenen die offene Form (f), so hat man für y' zu setzen:

$$y' + \frac{\varepsilon}{1}\delta y' + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\delta^2 y' + \cdots \cdots \quad \text{(f')}$$

wo nun aber

$$\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y, \ \delta^2 y' = \frac{d}{dx}\delta^2 y \quad \cdots \cdots \quad \text{(g)}$$

ist. Bei der Willkürlichkeit von δy, $\delta^2 y$, ... sind natürlich die Grössen (g) ebenfalls ganz willkürlich.

§. 3.

Allgemeinere Aufgabe.

I. Seien a und b zwei bestimmte Grössen, $f(x, y, y')$ eine bekannte Funktion von x, y, $\frac{dy}{dx}$, so soll y als Funktion von x so bestimmt werden, dass

*) Man kann immer ψ so beschaffen denken, dass für $\varepsilon = \varepsilon_1$, wo ε_1 beliebig klein, $\psi(x, \varepsilon_1) = F(x)$, welches auch die Funktion F sei. Ebenso kann aber auch für $\varepsilon = \varepsilon_1$ eine andere Funktionsform erreicht sein. Lässt man nun ψ ganz willkürlich, wie dies im Folgenden der Fall ist, so können offenbar alle möglichen anderen Funktionsformen als erreicht angesehen werden.

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

ein Maximum oder Minimum werde*); dabei setzen wir voraus, dass der Werth von y für $x = a$ und $x = b$ gegeben sei.

Ist $y = \varphi(x)$ die gesuchte Funktion, so werden wir also nach §. 2 an die Stelle von y in (a) setzen $\psi(x, \varepsilon)$, wodurch wir erhalten

$$J_1 = \int_a^b f\left[x, \psi(x, \varepsilon), \frac{d\psi(x, \varepsilon)}{dx}\right] dx \quad \ldots\ldots \quad (a')$$

und ausdrücken, dass J_1 ein M. M. sei für $\varepsilon = 0$. Das kommt darauf hinaus, die Grössen

$$\frac{dJ_1}{d\varepsilon}, \quad \frac{d^2 J_1}{d\varepsilon^2}$$

zu bilden, in ihnen $\varepsilon = 0$ zu setzen; dann die erste gleich Null zu machen und das Zeichen der zweiten zu untersuchen.

Setzen wir für den Augenblick z. A. wieder $\psi(x, \varepsilon)$ gleich y, $\frac{d\psi(x, \varepsilon)}{dx}$ gleich y', so ist (da a, b unveränderlich sind)

$$\begin{aligned}\frac{dJ_1}{d\varepsilon} &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\right] dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right) - \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\, dx + \sum_{x=a}^{x=b}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right),\end{aligned}$$

wenn wir durch

$$\sum^{x=b} F(x) \text{ den Werth von } F(x) \text{ für } x = b, \text{ also } F(b),$$

$$\sum_{x=a}^{x=b} F(x) \text{ die Differenz } F(b) - F(a) \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

bezeichnen. (Substitutionszeichen.)

Bezeichnen wir für $\varepsilon = 0$ (§. 2, IV.)

$$\frac{dJ_1}{d\varepsilon} \text{ durch } \delta J, \quad \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \text{ durch } \delta y,$$

*) Statt immer zu schreiben: „ein Maximum oder Minimum“, werden wir blos setzen: ein M. M.

so ist

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta x y d + \sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

wo nun aber (wegen $\varepsilon = 0$) unter y die gesuchte Funktion zu verstehen ist. Dabei ist δy ganz willkürlich.

Bedeutung von $\sum^{x=b} \delta y$.

II. Wir setzen allgemein $y = \psi(x, \varepsilon)$. Daraus folgt, dass wenn η der Werth von y für $x = b$ ist, man habe

$$\eta = \psi(b, \varepsilon),$$

also

$$\delta \eta = \left(\frac{\partial \psi(b, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \psi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \text{ für } x = b, \ \varepsilon = 0.$$

Demnach ist

$$\delta \eta = \sum^{x=b} \delta y.$$

Da wir aber voraussetzen, dass y für $x = b$ gegeben ist, also alle Funktionsformen, die wir hier betrachten, für $x = b$ denselben Werth liefern müssen, so ist $\psi(b, \varepsilon)$ nicht veränderlich mit ε, d. h. es ist

$$\frac{\partial \psi(b, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \text{ also auch } \delta \eta = 0.$$

Dasselbe gilt für $x = a$ *).

Gleichung des Maximums oder Minimums.

III. Hieraus folgt, dass in (c) das letzte Glied von selbst Null ist, mithin die allgemeine Bedingungsgleichung des M. M. ist:

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta y \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c')$$

Bei der Willkürlichkeit von δy ist aber diese Gleichung nur erfüllt, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

*) Hier ist übrigens wohl darauf zu achten, dass wir b als von ε unabhängig anzusehen hatten, weil eben b eine bestimmte gegebene Grösse ist. Hinsichtlich des Zeichens δ lässt sich allgemein aussprechen, dass wenn u irgend eine Funktion von ε ist, die Grösse δu gleich sei dem Werthe von $\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}$ für $\varepsilon = 0$.

Es ist die Richtigkeit dieser Behauptung sehr leicht einzusehen. Da nämlich δy willkürlich bleibt, so kann man etwa

$$\delta y = \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\xi$$

setzen, wo ξ innerhalb der Integrationsgrenzen immer positiv ist. Dann kann offenbar das Integral in (c') nicht Null sein, wenn nicht (1) erfüllt ist.

Die (1) bestimmt nun die Funktion y.

Behandlung der (1).

IV. Diese Gleichung ist im Allgemeinen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration also zwei willkürliche Konstanten: c_1, c_2 einführt.

Diese sind dann so zu bestimmen, dass y die beiden gegebenen Werthe für $x = a$, $x = b$ annimmt. Damit ist dann der erste Theil der Aufgabe erledigt.

Besondere Fälle.

V. Ist

$$f = \varphi + \psi y',$$

wo φ, ψ nur x und y enthalten, so ist $\frac{\partial f}{\partial y'} = \psi$, also

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y'\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y'\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$
$$- \frac{\partial \psi}{\partial y}y' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

d. h. die (1) enthält gar keine Differentialquotienten. Jetzt wird, wenn nicht besondere Verhältnisse eintreten, die Aufgabe insofern nicht lösbar sein, als man nicht y den beiden Grenzbedingungen unterwerfen kann.

VI. Ist y nicht in f enthalten, so ist aus (1) sofort

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1,$$

und eine nochmalige Integration liefert y.

VII. Ist x nicht entwickelt in f, so ist $\left(y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'', \quad y'\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'}y''.$$

Da aus (1) folgt, weil nicht $y' = 0$:

$$y' \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

so ist die (1) auch

$$\frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \; \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

In diesem Falle hat man also sofort:

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c_1$$

und eine nochmalige Integration liefert y.

VIII. Wäre die Grösse

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

identisch Null, so wäre

$$\int f(x, y, y')\, dx$$

unmittelbar integrirbar, und die Aufgabe gehört nicht hierher (vergl. §. 22, II., III.).

Wäre dagegen (d) identisch einer von Null verschiedenen Konstanten gleich, so wäre die gestellte Aufgabe nicht lösbar.

Schlussbemerkung.

IX. Wir müssen nun aber nochmals ganz besonders darauf aufmerksam machen, dass wir die beiden Grenzen des bestimmten Integrals J als konstant und gegeben voraussetzen, ebenso die beiden Endwerthe von y. In geometrischer Form heisst dies, es seien Anfangs- und Endpunkt der gesuchten Kurve gegeben, und alle anderen Kurven, die man mit ihr vergleicht, müssen durch diese beiden Punkte gehen. Nur unter dieser Voraussetzung gelten unsere Formeln *).

§. 4.

Entscheidung, ob Maximum oder Minimum.

I. Diese liegt im Werthe von $\frac{d^2 J_1}{d\varepsilon^2}$ für $\varepsilon = 0$, welche Grösse wir nun zuerst zu bilden haben. Dazu gehört, dass wir die in §. 3, I.

*) Es dürfen also nicht etwa die Werthe von y' an den beiden Grenzen, behufs Bestimmung der Konstanten, gegeben sein, da man sonst nicht das Recht hätte, (in II.) $\delta\eta = 0$ zu setzen, was doch für die (1) benützt wurde.

erhaltene Grösse $\frac{dJ_1}{d\varepsilon}$ nochmals nach ε differenziren. Wir betrachten zu dem Ende zuerst

$$\sum^{x=b} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}.$$

Da wir für y eingesetzt denken $\psi(x, \varepsilon)$, also für y': $\frac{d\psi(x, \varepsilon)}{dx}$, so wird

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2},$$

und wenn wir beachten, dass b nicht von ε abhängt:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \sum^{x=b} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right) = \sum^{x=b} \left[\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\right)\right] + \sum^{x=b} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2}\right).$$

Hier ist (nach §. 3, II.) für $\varepsilon = 0$ sowohl $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$, als auch $\frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2}$ Null; insofern also $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ nicht unendlich sind für $x = b$ ($\varepsilon = 0$), ist die eben betrachtete Grösse Null. Dasselbe gilt für $x = a$.

Bezeichnen wir also

$$\left(\frac{d^2 J_1}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} \text{ durch } \delta^2 J, \quad \left(\frac{\partial^2 \psi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} \text{ durch } \delta^2 y,$$

so ist

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta^2 y\right] dx,$$

wenn man $\varepsilon = 0$ setzt. Wegen (1), da man ja den gefundenen Werth einzusetzen hat, ist dies:

$$\delta^2 J = \int_a^b \delta y \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{\varepsilon=0} dx = \int_a^b \delta y\, \delta\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] dx.$$

Nun ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'';$$

also wenn man nach ε differenzirt und dann $\varepsilon = 0$ setzt (d. h. für y den gefundenen Werth):

$$\delta\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\delta y'-\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial y'}\delta y\right.$$
$$+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y'^2}\delta y'+\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial y'}y'\delta y+\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial y'^2}y'\delta y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\delta y'$$
$$\left.+\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial y'^2}y''\delta y+\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}y''\delta y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\delta y''\right]=\delta y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial y'}-\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial y'}y'-\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial y'^2}y''\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\delta y'\right).$$

Setzt man also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial y'}-\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial y'}y'-\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial y'^2}y''=P\quad\ldots\quad(\alpha)$$

so ist

$$\delta^2 J=\int_a^b\left[P\delta y-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\delta y'\right)\right]\delta y\,dx\quad\ldots\ldots\quad(\mathrm{a})$$

II. Setzen wir noch $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=Q$, und

$$\Phi(u)=Pu-\frac{d}{dx}(Qu')\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(\beta)$$

so ist

$$\int_a^b\Phi(\delta y)\,\delta y\,dx=\delta^2 J,$$

wo P, Q bekannte Funktionen von x sind (in denen y den gefundenen Werth hat).

Wir betrachten nun

$$u\Phi(z)-z\Phi(u).$$

Diese Grösse ist

$$u\left[Pz-\frac{d}{dx}(Qz')\right]-z\left[Pu-\frac{d}{dx}(Qu')\right]=z\frac{d}{dx}(Qu')$$
$$-u\frac{d}{dx}(Qz')=\frac{d}{dx}(zQu'-uQz')=\frac{d}{dx}[(zu'-uz')Q].$$

Setzen wir hier $z=ut$, so ist

$$zu'-uz'=uu't-(uu't+u^2t')=-u^2t',$$

also

$$u\Phi(ut)-ut\Phi(u)=-\frac{d}{dx}(Qu^2t').$$

III. Gesetzt nun, es sei u eine Funktion von x so, dass

$$\Phi(u)=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(\gamma)$$

so ist hiernach

$$u\Phi(ut) = -\frac{d}{dx}\left(Qu^2\frac{dt}{dx}\right),$$

also wenn man

$$ut = \delta y, \; t = \frac{\delta y}{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

setzt:

$$\int \delta y \, \Phi(\delta y)\, dx = \int ut\,\Phi(ut)\, dx = -\int t\frac{d}{dx}\left(Qu^2\frac{dt}{dx}\right)dx$$

$$= -t\int\frac{d}{dx}\left(Qu^2\frac{dt}{dx}\right)dx + \int\frac{dt}{dx}\,dx\int\frac{d}{dx}\left(Qu^2\frac{dt}{dx}\right)dx$$

$$= -Qu^2 t\frac{dt}{dx} + \int Qu^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 dx.$$

Nun ist

$$t = \frac{\delta y}{u}, \; \frac{dt}{dx} = \frac{u\delta y' - u'\delta y}{u^2}, \; t\frac{dt}{dx} = \delta y\frac{u\delta y' - u'\delta y}{u^3}, \; u^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{(u\delta y' - u'\delta y)^2}{u^2};$$

wird also u nicht Null innerhalb der Integrationsgrenzen, so ist weil δy an beiden Grenzen Null ist (§. 3, II.):

$$\delta^2 J = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{u\delta y' - u'\delta y}{u}\right)^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bestimmung von u.

IV. Setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = W,$$

so ist natürlich

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial y}\delta y + \frac{\partial W}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial W}{\partial y''}\delta y'',$$

$$\delta^2 J = \int_a^b \delta W \delta y\, dx; \; \Phi(u) = \frac{\partial W}{\partial y}u + \frac{\partial W}{\partial y'}u' + \frac{\partial W}{\partial y''}u''.$$

Die (1) ist $\qquad W = 0.$

Sei nun $\qquad y = \varphi(x, c_1, c_2)$

die allgemeine Auflösung dieser Gleichung, so wird sie identisch erfüllt, wenn man diesen Werth von y einsetzt. Desshalb kann man sie dann nach c_1, c_2 differenziren und hat

$$\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial W}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c} + \frac{\partial W}{\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial c} = 0, \ (y = \varphi).$$

Setzt man also $\frac{\partial y}{\partial c} = z$, so genügt der

$$\frac{\partial W}{\partial y} z + \frac{\partial W}{\partial y'} z' + \frac{\partial W}{\partial y''} z'' = 0 : z = \frac{\partial y}{\partial c}, \text{ wo } c = c_1, c_2.$$

Bei der linearen Form genügt man dieser Gleichung also durch

$$z = C_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial c_2}.$$

Dabei ist in $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial y'}$ natürlich y durch $\varphi(x, c_1, c_2)$ ersetzt zu denken. Für keinen anderen Werth als $z = \frac{\partial y}{\partial c}$ wird aber bekanntlich

$$\frac{\partial W}{\partial y} z + \frac{\partial W}{\partial y'} z' + \frac{\partial W}{\partial y''} z'' \text{ zu Null,}$$

wie sich aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen ergiebt.

Daraus folgt, dass, da $\Phi(u) = \frac{\partial W}{\partial y} u + \frac{\partial W}{\partial y'} u' + \frac{\partial W}{\partial y''} u''$, man der ($\gamma$) nur genügen kann durch

$$u = C_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial c_2},$$

wo y die durch Integration von (1) gefundene Funktion ist.

V. Kehren wir zu (2) zurück, so ist dort

$$\frac{u\,\delta y' - u'\,\delta y}{u} = \delta y' - \frac{u'}{u}\,\delta y = \delta y' - \frac{C_1 \frac{\partial y'}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y'}{\partial c_2}}{C_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial c_2}}\,\delta y,$$

wo man noch durch eine der Konstanten dividiren kann, so dass

$$u = \frac{\partial y}{\partial c_1} + m \frac{\partial y}{\partial c_2} \text{ oder } = m \frac{\partial y}{\partial c_1} + \frac{\partial y}{\partial c_2} \quad \ldots \quad (\gamma')$$

gesetzt werden darf.

Lässt sich nun m so bestimmen (als Konstante), dass die Grösse (γ') nicht Null wird innerhalb der Integrationsgrenzen*), so hat $\delta^2 J$ dasselbe Zeichen wie $\frac{\delta^2 f}{\partial y'^2}$, vorausge-

---

*) Man braucht offenbar nur einen Werth, welcher der (γ) genügt, der aber nicht Null werden darf innerhalb der Integrationsgrenzen. Wenn es also

setzt, dass diese Grösse immer dasselbe Zeichen habe innerhalb der Integrationsgrenzen.

Ist also jetzt $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ immer positiv, so hat man ein Minimum; ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ immer negativ, ein Maximum. Dabei sollen übrigens auch $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ nicht unendlich sein an den Grenzen (§. 4, I.). Es darf überhaupt keiner der in $\Phi(\delta y)$ vorkommenden Differentialquotienten innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich werden.

Fall, da $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 0$. (§. 3, V.)

VI. Jetzt ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$\delta^2 J = \int_a^b \delta y\, \delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx = \int_a^b \delta y^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right) dx. \quad \text{(b)}$$

Es muss also, wenn die Aufgabe überhaupt zulässig ist, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$ dasselbe Zeichen behalten innerhalb der Integrationsgrenzen, das dann offenbar wie oben entscheidet.

VII. Wäre auch noch

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

identisch Null, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = X,$$

wo X eine Funktion von x, mithin wenn $\psi = \frac{\partial F}{\partial y}$,

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial x} + Xy + X_1; \; \varphi + y'\psi = \frac{dF}{dx} + Xy + X_1 = f,$$

so wäre die (1):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = X = 0,$$

woraus natürlich nichts zu schliessen ist. Ist aber identisch $X = 0$, so ist das Integral unmittelbar bestimmbar (§. 3, VIII.).

---

einen Werth von u giebt, für den (γ') nicht Null wird in diesen Grenzen, so wähle man diesen und die ganze Rechnung ist in Ordnung.

Fall, da f kein y' enthält.

VIII. In diesem Falle ist die (1) in §. 3:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

während man

$$\delta^2 J = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\delta y)^2 \, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c')$$

findet. Im Allgemeinen wird wohl auch jetzt die etwa vorgelegte Aufgabe nicht lösbar sein; wenn sie es aber doch ist (was von der besonderen Form derselben abhängt), so entscheidet $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Diese Grösse muss also innerhalb der Integrationsgrenzen beständig positiv oder negativ sein, und man hat im ersteren Falle ein Minimum, im zweiten ein Maximum.

Wir wenden uns nun zunächst zu Beispielen.

§. 5.

1. Kürzeste Linie in einer Ebene.

I. Zwischen zwei festen Punkten in einer Ebene soll die kürzeste Linie in derselben gefunden werden (§. 1).

Hier ist

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx, \; b > a; \; f = \sqrt{1 + y'^2}; \; \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Also (§. 3, VI.)

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1,$$

woraus y' als konstant hervorgeht, d. h.

$$y = c_1 x + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Dann (§. 4, III.)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

welche Grösse immer positiv ist. Ferner (§. 4, V.)

$$\frac{\partial y}{\partial c_1} = x, \; \frac{\partial y}{\partial c_2} = 1; \; m \frac{\partial y}{\partial c_2} + \frac{\partial y}{\partial c_1} = m + x,$$

wo nun offenbar m sich immer so bestimmen lässt, dass $m + x$ nicht Null ist innerhalb der Integrationsgrenzen. Die Gerade (a) liefert also das Minimum.

2. Kurve der kleinsten Rotationsfläche.

II. Zwischen zwei festen Punkten in einer Ebene soll eine Kurve bestimmt werden so, dass dieselbe bei der Rotation um die x-Axe die kleinste Oberfläche erzeugt.

Hier ist

$$J = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

wo wir $b > a$, y positiv und den Bogen wachsend mit wachsendem x voraussetzen.

Die (1) giebt (§. 3, VII.)

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2 y}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1;\; y = c_1\sqrt{1+y'^2}.$$

Daraus

$$y'^2 = \frac{y^2-c_1^2}{c_1^2};\;\; y' = \pm\frac{\sqrt{y^2-c_1^2}}{c_1};$$

$$\pm\int\frac{\partial y}{\sqrt{y^2-c_1^2}} = \frac{x}{c_1}+c_2,\;\; \pm l\left(y+\sqrt{y^2-c_1^2}\right) = \frac{x}{c_1}+c_2,$$

$$y+\sqrt{y^2-c_1^2} = e^{\pm\left(\frac{x}{c_1}+c_2\right)},\; y^2-c_1^2 = [c_2 e^{\pm\frac{x}{c_1}} - y]^2;$$

$$-c_1^2 = c_2^2 e^{\pm\frac{2x}{c_1}} - 2c_2 y e^{\pm\frac{x}{c_1}},\; y = \frac{c_2}{2}e^{\pm\frac{x}{c_1}} + \frac{c_1^2}{2c_2}e^{\mp\frac{x}{c_1}}.$$

Setzt man $c_2 = c_1 e^{\mp\frac{\alpha}{c_1}}$, wo das Doppelzeichen dem vorigen entsprechen soll, so hat man

$$y = \frac{c_1}{2}e^{\pm\left(\frac{x-\alpha}{c_1}\right)} + \frac{c_1}{2}e^{\mp\left(\frac{x-\alpha}{c_1}\right)}$$

d. h. allgemein

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

wenn h, k die beiden Konstanten. Die Kurve ist eine Kettenlinie, welche durch die zwei festen Punkte gehen muss.

III. Es fragt sich nun aber, ob es möglich sei, immer durch zwei gegebene Punkte auch eine Kettenlinie zu legen, d. h. es fragt sich, ob man aus

$$\eta = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{a-k}{h}} + e^{-\frac{a-k}{h}}\right),\ \zeta = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{b-k}{h}} + e^{-\frac{b-k}{h}}\right) \quad \ldots\ldots \text{(c)}$$

wo η, ζ die (gegebenen) Ordinaten der beiden Punkte sind, die Konstanten h und k bestimmen kann. Setzen wir $b - k = \alpha$, so ist die zweite (c):

$$\zeta = \tfrac{1}{2} h \left(e^{\frac{\alpha}{h}} + e^{-\frac{\alpha}{h}}\right),$$

und es muss also, bei festem Werthe von α, ein Werth h möglich sein, was auch das positive ζ sei. Dieser Werth ist übrigens auch nur positiv zu nehmen.

Betrachten wir nun aber die Grösse

$$v = u\left(e^{\frac{\alpha}{u}} + e^{-\frac{\alpha}{u}}\right),$$

so ist

$$\frac{dv}{du} = e^{\frac{\alpha}{u}} + e^{-\frac{\alpha}{u}} - \frac{\alpha}{u}\left(e^{\frac{\alpha}{u}} - e^{-\frac{\alpha}{u}}\right);\ \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{\alpha^2}{u^3}\left(e^{\frac{\alpha}{u}} + e^{-\frac{\alpha}{u}}\right),$$

welch letztere immer positiv ist bei positivem u. Die Grösse v erreicht also einen Minimumwerth, wenn

$$e^{\frac{\alpha}{u}} + e^{-\frac{\alpha}{u}} - \frac{\alpha}{u}\left(e^{\frac{\alpha}{u}} - e^{-\frac{\alpha}{u}}\right) = 0,\ e^{\frac{2\alpha}{u}} + 1 - \frac{\alpha}{u}\left(e^{\frac{2\alpha}{u}} - 1\right) = 0,$$

$$e^{\frac{\alpha}{u}} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha}{u} + 1}{\frac{\alpha}{u} - 1}},$$

aus welcher Gleichung durch Näherung folgt:

$$\frac{\alpha}{u} = \pm 1\cdot 19968,\ u = \pm \frac{\alpha}{1\cdot 19968},$$

wo man das Zeichen immer so wählen kann, dass $u > 0$ ausfällt. Für diesen Werth ist v ein Minimum, und es findet sich

$$v = \pm \frac{\alpha\left(e^{1\cdot 19968} + e^{-1\cdot 19968}\right)}{1\cdot 19968} = \pm 3\cdot 01776\,\alpha.$$

Da der Bruch $\frac{z+1}{z-1}$ abnimmt mit wachsendem z, e^z dagegen zunimmt, so giebt es nur einen Werth, für den

$$e^v = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}},$$

also in v auch ein einziges Minimum.

Hieraus folgt, dass wenn die Kettenlinie soll gezeichnet werden können, nothwendig

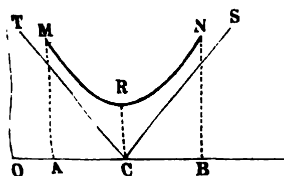
$$\zeta > \pm 1 \cdot 50883 \, (b - k) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(d)}$$

sein muss, wo das Zeichen so zu wählen ist, dass die zweite Seite positiv ausfällt. Ganz eben so

$$\eta > \pm 1 \cdot 50883 \, (a - k) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(d')}$$

Es lässt sich dies geometrisch leicht aussprechen. Sind M, N, Fig. 2, die beiden Punkte, so ist die Abszisse des tiefsten Punktes R der Kettenlinie k, und seine Ordinate h, so dass $OC = k$, $CR = h$. Demnach (wir nehmen a und b positiv) $b - k = CB$, $a - k = -AC$. Ziehen wir nun durch C eine Gerade, welche mit der Abszissenaxe den Winkel α, bestimmt aus

Fig. 2.



$$tg\,\alpha = 1 \cdot 50883, \quad \alpha = 56^0 28',$$

macht, so muss N über dieser Geraden (CS) liegen; macht CT mit CO denselben Winkel, so muss ebenso M über CT liegen.

IV. Was die wirkliche Bestimmung von h und k betrifft, so hat sie aus den (c) zu geschehen. Um dieselbe zu erhalten setzen wir

$$b - a = \xi, \; h = \frac{\xi}{2\mu}, \; k = a + \tfrac{1}{2}\xi + h\varrho = \tfrac{1}{2}(a + b) + h\varrho,$$

woraus

$$a - k = -\tfrac{1}{2}\xi - h\varrho, \; \frac{a-k}{h} = -\mu - \varrho; \; b - k = \tfrac{1}{2}\xi - h\varrho, \frac{b-k}{h} = \mu - \varrho,$$

so dass

$$\eta = \frac{\xi}{4\mu}\left(e^{\mu+\varrho} + e^{-(\mu+\varrho)}\right), \quad \zeta = \frac{\xi}{4\mu}\left(e^{\mu-\varrho} + e^{-(\mu-\varrho)}\right),$$

woraus μ, ϱ zu bestimmen sind. Dabei wollen wir $\eta > \zeta$ annehmen, was offenbar der Allgemeinheit keinen Eintrag thut *).

Dann ist ($\mu > 0$)

---

*) Für $\eta = \zeta$ ist $k = \frac{1}{2}(a + b)$; μ ist, wie h, positiv, da $\xi > 0$ angenommen ist. Da $e^v + e^{-v}$ von $v = 0$ an wächst, aber $\eta > \zeta$, so ist $\mu + \varrho > \mu - \varrho$, also $\varrho > 0$ und folglich $k > \frac{1}{2}(a + b)$.

$$\eta - \zeta = \frac{\xi}{4\mu}(e^{\mu} - e^{-\mu})(e^{\varrho} - e^{-\varrho});$$

$$(e^{\mu} - e^{-\mu})^2 = (e^{\mu} + e^{-\mu})^2 - 4,\ e^{\mu} - e^{-\mu} = \sqrt{(e^{\mu} + e^{-\mu})^2 - 4};$$

weiter

$$(e^{\mu} + e^{-\mu})(e^{\varrho} - e^{-\varrho}) = e^{\mu+\varrho} - e^{-(\mu+\varrho)} - (e^{\mu-\varrho} - e^{-(\mu-\varrho)})$$

$$= \sqrt{(e^{\mu+\varrho} + e^{-(\mu+\varrho)})^2 - 4} - \sqrt{(e^{\mu-\varrho} + e^{-(\mu-\varrho)})^2 - 4}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4\mu\eta}{\xi}\right)^2 - 4} - \sqrt{\left(\frac{4\mu\zeta}{\xi}\right)^2 - 4},$$

somit

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{4\mu\eta}{\xi}\right)^2 - 4} - \sqrt{\left(\frac{4\mu\zeta}{\xi}\right)^2 - 4}}{\eta - \zeta} = \frac{4\mu}{\xi}\frac{e^{\mu} + e^{-\mu}}{e^{\mu} - e^{-\mu}},$$

oder da $\xi > 0$:

$$\frac{\sqrt{4\mu^2\eta^2 - \xi^2} - \sqrt{4\mu^2\zeta^2 - \xi^2}}{2(\eta - \zeta)} = \mu\frac{e^{\mu} + e^{-\mu}}{e^{\mu} - e^{-\mu}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

aus welcher Gleichung der positive Werth von μ zu ermitteln ist.

Jedenfalls muss

$$4\mu^2\eta^2 > \xi^2,\ 4\mu^2\zeta^2 > \xi^2$$

sein, von welchen Bedingungen die zweite die erste einschliesst, so dass

$$\mu > \frac{\xi}{2\zeta} \text{ d. h. } > \frac{b-a}{2\zeta},\ h < \zeta$$

ist, wie allerdings von selbst klar.

Der Differentialquotient der zweiten Seite von (e), nach μ, ist

$$\frac{e^{2\mu} - e^{-2\mu} - 4\mu}{(e^{\mu} - e^{-\mu})^2} = 2\left(\frac{(2\mu)^3}{1.2.3} + \frac{(2\mu)^5}{1..5} + \cdots\right)(e^{\mu} - e^{-\mu})^{-2},$$

also (für $\mu > 0$) immer positiv, so dass diese Grösse wächst mit wachsendem μ; der Differentialquotient der ersten Seite ist

$$\frac{4\mu}{\eta - \zeta}\,\frac{\eta^2\sqrt{4\mu^2\zeta^2 - \xi^2} - \zeta^2\sqrt{4\mu^2\eta^2 - \xi^2}}{\sqrt{4\mu^2\zeta^2 - \xi^2}\,\sqrt{4\mu^2\eta^2 - \xi^2}} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Der Zähler dieses Bruches kann Null werden, wo dann

$$\eta^4(4\mu^2\zeta^2-\xi^2)=\zeta^4(4\mu^2\eta^2-\xi^2),\ 4\mu^2\eta^2\zeta^2(\eta^2-\zeta^2)=\xi^2(\eta^4-\zeta^4),$$

$$4\mu^2\eta^2\zeta^2=\xi^2(\eta^2+\zeta^2),\ \mu=\frac{\xi\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{2\eta\zeta}=\frac{\xi}{2\zeta}\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\eta^2}}$$

ist, welcher Werth wirklich $> \frac{\xi}{2\zeta}$ ist. Für $\mu=\frac{\xi}{2\zeta}$ ist der Zähler des Bruches (α) negativ, für $\mu=\infty$ aber positiv, so dass er sein Zeichen wechselt bei dem vorhin angeführten Werthe. Die erste Seite von (e) $\left(\text{von } \mu=\frac{\xi}{2\zeta} \text{ an}\right)$ nimmt also anfänglich ab, und wächst später; sie erreicht ein Minimum für

$$\mu=\frac{\xi}{2\zeta}\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\eta^2}}.$$

Für diesen Werth ist diese erste Seite

$$=\frac{1}{2(\eta-\zeta)}\left(\frac{\xi\eta}{\zeta}-\frac{\xi\zeta}{\eta}\right)=\frac{\xi(\eta+\zeta)}{2\zeta\eta}=\frac{\xi}{2\zeta}\left(1+\frac{\zeta}{\eta}\right),$$

welcher Werth zwischen $\frac{\xi}{2\zeta}$ und $2\frac{\xi}{2\zeta}$ liegt, also zwischen dem Anfangswerth von μ und dem Doppelten desselben.

Zeichnet man mithin die beiden Kurven, welche die erste und zweite Seite der (e), von $\mu=\frac{\xi}{2\zeta}$ an, darstellen, so wird die erste *sich zuerst* senken bis zu $\mu=\frac{\xi}{2\zeta}\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\eta^2}}$ und sich von da an wieder heben, während die zweite fortwährend steigt. Ein Durchschneiden beider Kurven ist also möglich, nicht aber nothwendig. Im letzteren Falle ist die Aufgabe unlösbar (III.); im ersten giebt der betreffende Werth von μ die gesuchte Wurzel der Gleichung.

Ist μ bestimmt, so ergiebt sich ϱ aus

$$e^{\varrho}-e^{-\varrho}=\frac{4\mu(\eta-\zeta)}{\xi(e^{\mu}-e^{-\mu})},$$

und dann h, k aus

$$h=\frac{b-a}{2\mu},\ k=\tfrac{1}{2}(a+b)+h\varrho.$$

V. Behufs der Entscheidung, ob Maximum oder Minimum, hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{yy'}{(1+y'^2)^{1/2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=\frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}},\ \text{immer positiv.}$$

Dann

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right) - \frac{x-k}{2h}\left(e^{\frac{x-k}{h}} - e^{-\frac{x-k}{h}}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = -\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}} - e^{-\frac{x-k}{h}}\right);\ \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}} - e^{-\frac{x-k}{h}}\right),$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial k} = -\frac{dy}{dx};\ \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{y}{h} - \frac{x-k}{h}\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} + m\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{y}{h} - \left(\frac{x-k}{h} + m\right)\frac{dy}{dx}\ (\text{§. 4, V.}).$$

Sollte letztere Grösse innerhalb der Integrationsgrenzen Null werden, so müsste

$$m = \frac{y}{hy'} - \frac{x-k}{h},\ hm - k = \frac{y}{y'} - x\ .\ .\ .\ .\ (\text{f})$$

sein. Ziehen wir nun im Punkte (x, y) an die Kurve eine Tangente, so trifft dieselbe die Abszissen- (Rotations-) Axe im Punkte, dessen Abszisse $= x - \frac{y}{y'}$. Da im Scheitel R die Grösse y' Null, also $\frac{y}{y'} = \infty$, ist; von M bis R aber y' negativ; von R bis N positiv, so läuft von M bis R die Grösse $\frac{y}{y'} - x$ durch negative Werthe (bis $-\infty$ bei R); von R bis N durch positive (von $+\infty$ an). Würde nun $\frac{y}{y'} - x$, wenn man von M zu N geht, alle möglichen reellen Werthe durchlaufen, so gäbe es offenbar für jeden möglichen Werth von m auch einen $\frac{y}{y'} - x$, der (f) genügte, und es würde somit unmöglich sein, einen Werth von m zu finden, für den $\frac{\partial y}{\partial h} + m\frac{\partial y}{\partial k}$ nicht Null würde (innerhalb der Integrationsgrenzen). Dies wäre etwa der Fall, wenn $\frac{y}{y'} - x$ für M positiv, bei N negativ wäre. Würde dagegen $\frac{y}{y'} - x$ für M negativ, $= -\alpha$, sein, so müsste bei N dieselbe Grösse entweder positiv, jedenfalls aber über $-\alpha$, sein. Da wir a und b positiv annehmen dürfen, so ist $\frac{y}{y'} - x$ von

M bis R entschieden negativ, während von R bis N diese Grösse positiv und (später) negativ sein kann.

Zieht man nun in M eine Tangente an die Kettenlinie und es trifft dieselbe die Abszissenaxe in M_1; trifft ebenso die Tangente im Punkte N in N_1 auf die Abszissenaxe: so muss nothwendig

$$ON_1 < OM_1$$

sein. Denn es ist für M:

$$\frac{y}{y'} - x = - OM_1;$$

für N:

$$\frac{y}{y'} - x = - ON_1,$$

und da mithin

$$- ON_1 > - OM_1, \text{ also } ON_1 < OM_1$$

sein muss, so ist unsere Angabe als richtig befunden. Die eben angegebene Bedingung lässt sich leicht dahin aussprechen, dass sich *die fraglichen beiden Tangenten oberhalb der Abszissenaxe (auf der Seite der positiven y) schneiden müssen*, wenn überhaupt von einem M. M. die Rede sein soll.

Ist diese Bedingung erfüllt, so hat man aber ein Minimum.

3. Rotationskörper vom geringsten Widerstand.

VI. Man soll die Form desjenigen Rotationskörpers bestimmen, *welcher*, wenn er parallel der Axe seiner Figur bewegt wird, den geringsten Widerstand in einem widerstehenden Mittel erleidet.

Wir nehmen an, dass wenn eine Ebene vom Flächeninhalte F sich in einer zu ihr senkrechten Richtung in einer Flüssigkeit von der Dichte ϱ bewegt, mit einer Geschwindigkeit v, der Widerstand *gleich* $k\varrho F v^2$ sei, wo k ein bestimmter Koeffizient ist.

Bewegt sich nun aber diese Ebene nach einer Richtung, die mit ihrer Axe den Winkel φ macht, so trifft dieselbe in der Richtung der Bewegung auf eine Flüssigkeitssäule, deren Fläche nur $F\cos\varphi$ *ist*. Die Geschwindigkeit v kann zerlegt werden in $v\cos\varphi$ senkrecht zur Fläche, und $v\sin\varphi$ parallel zu letzterer; nur mit jener stösst die Fläche senkrecht auf die Flüssigkeit. Demnach verhalten sich die Dinge so, als wenn die Ebene $F\cos\varphi$ mit einer Geschwindigkeit $v\cos\varphi$ senkrecht auf die Flüssigkeit stösst, so dass der Widerstand gleich $k\varrho F v^2\cos^3\varphi$ ist. Eine (Kreis-) Kegelfläche, die sich gegen *ihre* Axe unter einem Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ neigt, und sich nach der Rich-

tung ihrer Axe mit einer Geschwindigkeit v bewegt, ist in derselben Lage, wie die so eben betrachtete Ebene, insofern beide Flächen denselben Inhalt haben.

Eine Rotationsfläche ist der Grenzwerth einer Summe von (Kreis-) Kegelflächen, und da die Neigung ψ jedes Elementes der erzeugenden Kurve gegen die Axe durch die Gleichung $tg\,\psi = \frac{dy}{dx}$, also die Neigung φ der Senkrechten auf dasselbe durch $cotg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$ gegeben ist, woraus $cos\,\varphi = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ folgt, so findet sich leicht, dass der Widerstand der Rotationsfläche gleich

$$2\pi k\varrho\, v^2 \int_a^b \frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ist, wenn a, b die festen Abszissen der Endpunkte, y die (laufende) Ordinate der erzeugenden Kurve ist. Die Endpunkte derselben sind übrigens als gegeben angesehen. Jetzt muss also

$\int_a^b \frac{yy'^3}{1+y'^2}\, dx$ ein Minimum sein, wo nun (§. 3, VII.)

$$f = \frac{yy'^3}{1+y'^2}$$

ist (y und y' positiv).

Die (1) liefert

$$\frac{yy'^3}{1+y'^2} - yy'\,\frac{3y'^2(1+y'^2) - 2y'^4}{(1+y'^2)^2} = -2c_1,$$

d. h.

$$-2yy'^3 = -2c_1(1+y'^2)^2,\quad y = c_1\,\frac{(1+y'^2)^2}{y'^3}.$$

Setzen wir $y' = u$, so ist

$$y = c_1\,\frac{(1+u^2)^2}{u^3};\quad \frac{dy}{dx} = u,\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{u},\quad x = \int\frac{\partial y}{u} = \int\frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{u}\partial u$$

$$= c_1\int\frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5}\,\partial u = c_1\left[l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{4u^4}\right] + c_2.$$

Als Integralsystem der gesuchten Kurve hat man also

$$x = c_1 \left[l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{4u^4} \right] + c_2, \; y = c_1 \frac{(1+u^2)^2}{u^3}, \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

zwischen welchen Gleichungen u zu eliminiren wäre.

VII. Aus (g) folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5}, \quad \frac{dy}{du} = c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4} \\ \frac{d^2x}{du^2} &= c_1 \frac{15+6u^2-u^4}{u^6}, \quad \frac{d^2y}{du^2} = \frac{4c_1(3+u^2)}{u^5} \end{aligned}\right\} \; . \quad (g')$$

Dabei ist $c_1 > 0$, wie aus der anfänglichen Gleichung sofort hervorgeht (y und y' positiv). Aus den (g') folgt, dass für $u = \pm\sqrt{3}$, wo *jedoch* nur das obere Zeichen gilt (da $u = y'$ nur positiv ist), y ein Minimum erreicht, da dann $\frac{d^2y}{du^2} > 0$ ist. Für denselben Werth ist übrigens auch x ein Minimum. Von $u = \sqrt{3}$ an werden *also* y und x mit u wachsen; lässt man u unter $\sqrt{3}$ sinken, so werden x und y ebenfalls wachsen mit abnehmendem u.

Die durch (g) gegebene Kurve scheidet sich also naturgemäss *in zwei Zweige;* im einen geht u von $\sqrt{3}$ an bis ins Unendliche; im anderen u von $\sqrt{3}$ bis 0. Wir wollen die Zweige als ersten $(u > \sqrt{3})$ und zweiten $(u < \sqrt{3})$ unterscheiden.

Da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{1}{c_1} \frac{u^5}{(1+u^2)(u^2-3)}$$

im ersten positiv, im zweiten negativ ist, so wendet jener seine hohle Seite nach der Richtung der positiven, der andere nach Richtung der negativen y.

y ist unendlich für $u = \infty$ und für $u = 0$, so dass beide Zweige ins Unendliche verlaufen; für den ersten Zweig $(u > \sqrt{3})$ ist $x = \infty$, wenn $y = \infty$; für den zweiten $(u < \sqrt{3})$ ist für $u = 0$ ebenfalls $x = \infty$.

Da $\frac{dy}{dx} = u$, so haben im Anfangspunkte beide Zweige dieselbe Tangente, welche mit der Abszissenaxe einen Winkel von 60^0 macht, und es ist der erste Zweig beständig über, der andere beständig unter dieser gemeinschaftlichen Tangente.

Ist nämlich y_1 die einem bestimmten x zugehörige Ordinate der Tangente, so ist die Differenz

$$y - y_1 = c_1 \frac{(1+u^2)^2}{u^3} - y_1$$

anfänglich $(u = \sqrt{3})$ Null; ferner ist

$$\frac{dy_1}{dx} = \sqrt{3}, \frac{dy_1}{du} = \sqrt{3}\frac{dx}{du} = \sqrt{3}\, c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5},$$

also

$$\frac{d(y-y_1)}{du} = c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4} - c_1 \sqrt{3} \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^5}$$

$$= c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)(u-\sqrt{3})}{u^5}.$$

Diese Grösse ist hiernach in beiden Zweigen positiv, und folglich wird im ersten Zweige, wo u wächst, $y - y_1$ wachsen, also immer positiv sein; im zweiten, wo u abnimmt, auch $y - y_1$ abnehmen und mithin beständig negativ sein.

VIII. Ehe wir weiter gehen, wollen wir über M. M. entscheiden.

Um $\frac{\partial y}{\partial c_1}, \frac{\partial y}{\partial c_2}$ aus (g) zu finden, wird man u als eliminirt zu denken haben, so dass man u als Funktion von (x und) c_1 und c_2 mittelst der ersten (g) anzusehen hat.

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dc_1} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial c_1} + \frac{\partial y}{\partial c_1} = c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4}\frac{\partial u}{\partial c_1} + \frac{(1+u^2)^2}{u^3};$$

$$\frac{dy}{dc_2} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial c_2} + \frac{\partial y}{\partial c_2} = c_1 \frac{(1+u^2)(u^2-3)}{u^4}\frac{\partial u}{\partial c_1};$$

und dann

$$0 = l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{u^4} + c_1 \frac{(1+u^2)(3-u^2)}{u^5}\frac{\partial u}{\partial c_1};$$

$$0 = c_1 \frac{(1+u^2)(3-u^2)}{u^5}\frac{\partial u}{\partial c_2} + 1,$$

woraus nun

$$\frac{dy}{dc_1} = \frac{(1+u^2)^2}{u^3} - u\left[l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{u^4}\right] = \frac{y}{c_1} - \frac{u(x-c_2)}{c_1};$$

$$\frac{dy}{dc_2} = -u; \quad \frac{dy}{dc_1} + m\frac{dy}{dc_2} = \frac{y}{c_1} - \frac{u(x-c_2)}{c_1} - mu.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = y\frac{3y'^2 + y'^4}{(1+y'^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{2yy'(3-y'^2)}{(1+y'^2)^3}.$$

Da wir y, y' positiv voraussetzen, so muss also für das gesuchte Minimum $3 - y'^2$, d. h. $3 - u^2$ positiv, $u < \sqrt{3}$ sein. Es kann

also nur der zweite (untere) Zweig, der gegen die Abszissenaxe hohl ist, den Forderungen der Aufgabe entsprechen.

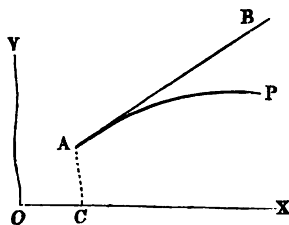
Die weitere Bedingung besteht darin, dass ein Werth von m möglich sein muss, für den nicht

$$\frac{y}{c_1} - \frac{u(x-c_2)}{c_1} - mu = 0, \frac{y}{c_1 u} - \frac{x-c_2}{c_1} - m = 0,$$

$$\frac{y}{u} - x - (c_1 m - c_2) = 0$$

ist. Nun ist $u < \sqrt{3}$; $\frac{y}{u} - x$ wird jetzt wachsen mit wachsendem Kurvenbogen, da wenn A, Fig. 3, der Anfangspunkt, AB die Tangente in demselben, alle Tangenten die Abszissenaxe in Punkten treffen, deren Abszissen $\left(x - \frac{y}{u}\right)$ kleiner sind als für die erste; daraus folgt von selbst, dass die fragliche Grösse nicht alle möglichen Werthe durchläuft, man also m immer noch so wählen kann, dass die vorhin angeführte Gleichung nicht erfüllt ist.

Fig. 3.



Demnach hat man ein Minimum.

IX. Die Bestimmung der zwei Konstanten erfolgt aus der *bekannten* Lage der zwei Endpunkte. Da die Lage des Koordinatenanfangs eine ganz beliebige ist, so kann man ihn nach Bequemlichkeit wählen. Legen wir ihn einmal so, dass A in der Ordinatenaxe liegt, so ist da $OC = c_1 \left[l(\sqrt{3}) + \frac{1}{3} + \frac{3}{36}\right] + c_2$, das Gleichungssystem des Zweigs:

$$x = c_1 \left[l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{4u^4} - \tfrac{1}{2} l(3) - \frac{5}{12}\right], y = c_1 \frac{(1+u^2)^2}{u^3},$$

und es wird sich fragen, ob irgend ein beliebiger Punkt der Ebene, dessen x und y positiv sind, in dieser Kurve liegen kann. Sind p, q dessen Koordinaten, so muss

$$p = c_1 \left[l(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{3}{4u^4} - \tfrac{1}{2} l(3) - \frac{5}{12}\right], q = c_1 \frac{(1+u^2)^2}{u^3}$$

sein. Daraus zunächst

$$\frac{p}{q} = \frac{u^3 \left[l(u) - \frac{1}{2} l(3) - \frac{5}{12}\right] + u + \frac{3}{4u}}{(1+u^2)^2},$$

woraus u zu bestimmen ist, worauf dann c_1 sofort folgt. Es wird sich also blos um die Frage handeln, ob die zweite Seite dieser Gleichung alle möglichen positiven Werthe annehmen kann. Sie ist aber 0 für $u = \sqrt{3}$, und ∞ für $u = 0$, woraus unsere Frage sofort bejahend beantwortet ist.

Sind nun im Allgemeinen die Koordinaten der beiden gegebenen Endpunkte (für die anfängliche Lage der Axen):

$$a, \eta; \; b, \zeta \; (b > a)$$

so muss

$$a = c_1 \left[l(u_1) + \frac{1}{u_1^2} + \frac{3}{4 u_1^4} \right] + c_2, \; \eta = c_1 \frac{(1 + u_1^2)^2}{u_1^3};$$

$$b = c_1 \left[l(u_2) + \frac{1}{u_2^2} + \frac{3}{4 u_2^4} \right] + c_2, \; \zeta = c_1 \frac{(1 + u_2^2)^2}{u_2^3}$$

sein, wo u_1, u_2 die entsprechenden Werthe von u bedeuten. Aus diesen vier Gleichungen sind u_1, u_2, c_1, c_2 zu bestimmen.

Man hat

$$a = \frac{u_1^3 \eta}{(1 + u_1^2)^2} \left[l(u_1) + \frac{1}{u_1^2} + \frac{3}{4 u_1^4} \right] + c_2,$$

$$b = \frac{u_2^3 \zeta}{(1 + u_1^2)^2} \left[l(u_2) + \frac{1}{u_2^2} + \frac{3}{4 u_2^4} \right] + c_2,$$

so dass

$$b - a = \frac{\zeta}{(1 + u_2^2)^2} \left[u_2^3 l(u_2) + u_2 + \frac{3}{4 u_2} \right]$$
$$- \frac{\eta}{(1 + u_1^2)^2} \left[u_1^3 \, l(u_1) + u_1 + \frac{3}{4 u_1} \right] \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

ist. Denkt man sich also eine Tabelle der Grösse

$$\left[u^3 l(u) + u + \frac{3}{4 u} \right] \frac{1}{(1 + u^2)^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha')$$

berechnet, so wird man darin diejenigen Werthe von $u (u_1, u_2)$ wählen, für welche die (α) erfüllt ist. Dann ergeben sich c_1, c_2 sofort, und die Aufgabe ist erledigt.

Man wird beachten, dass der Körper, den wir gefunden, ringförmig ist, d. h. dass wir ihn vorn und hinten offen denken, wie natürlich, da wir den Widerstand des vorderen Kreises nicht in Betracht ziehen.

Wollte man übrigens fordern, dass im Anfangspunkt $y = 0$ wäre, so hätte man oben $\eta = 0$, woraus $c_1 = 0$ folgen würde. Dies würde in VI. zur Folge haben:

$$y = 0, \text{ oder } y' = 0,$$

von welchen Gleichungen die erste zu verwerfen wäre. Die zweite würde

$$y = c_2$$

liefern, wo aber $c_2 = 0$ sein müsste. Dies ist natürlich abermals zu verwerfen, so dass also eine in eine Spitze auslaufende Form nicht besteht.

§. 6.

Grenzbedingungen.

I. In den seitherigen Untersuchungen nahmen wir an (§. 3, I.), dass die Grenzwerthe von x (a und b), so wie die Werthe von y für diese Werthe gegeben, also unveränderlich, seien. Es kann sich nun aber ereignen, dass gewisse Bedingungen, die nur an den Grenzen stattfinden sollen, gegeben sind, aus denen dann erst die Werthe von a und b, u. s. w. zu ermitteln sind (Grenzgleichungen).

So etwa könnte in dem ersten Beispiele des §. 5 noch bestimmt sein, dass die kürzeste Kurve nicht zwischen zwei Punkten in der *Ebene*, sondern zwischen zwei gegebenen Kurven (in derselben) zu ziehen sei, wo also die Grenzwerthe der Abszissen (a und b) und die ihnen zugehörigen Ordinaten den betreffenden Gleichungen der Kurven genügen müssen.

Derartige Aufgaben lösen sich nun aber ganz in der seitherigen Weise.

Soll also das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') \, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

zu einem M. M. werden, und sind x_1, x_2 selbst noch zu bestimmen, wozu ganz offenbar noch gewisse Nebenbedingungen werden gegeben sein müssen, so wird man bedenken, dass wenn die Aufgabe überhaupt lösbar ist, endgiltig die Werthe x_1, x_2, sowie die zugehörigen Werthe von y, bestimmt (gefunden) sein müssen.

Gesetzt nun, man lege sich dieselbe Aufgabe nochmals vor, nur mit dem Unterschiede, dass man für x_1, x_2 die gefundenen (also festen) Werthe und für die zugehörigen y die ebenfalls gefundenen (festen) Werthe denke; so wird man offenbar dieselbe Auflösung (d. h. dieselbe Funktion y von x) wieder erhalten.

Will man die endgiltig gefundenen Werthe nicht thatsächlich einführen, was man denn doch nicht kann, da sie ja erst als ge-

funden gedacht sind, so kann man immerhin den x_1, x_2 und zugehörigen y feste Werthe beigelegt denken, deren nähere Bestimmung man sich vorbehält, und dann die Aufgabe unter dieser Anschauung, die nach dem Vorstehenden entschieden zulässig ist, lösen. Dadurch aber ist man in die Form des §. 3 gerathen und alles dort Gesagte bleibt vollständig, wie es gesagt ist, anwendbar *).

Man wird also y als Funktion von x aus der Gleichung (1) in §. 3 bestimmen, und dann die Werthe der eingetretenen Konstanten, so wie von x_1, x_2 aus den weiter gegebenen Bedingungen ermitteln.

II. Was nun aber diese Ermittelung betrifft, so wird man beachten, dass wenn y aus (1) ermittelt ist, und man diesen Werth in (a) einsetzt, das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

sich auswerthen lässt. Dieser Werth erscheint dann als Funktion von x_1, x_2 und den durch Integration eingetretenen Konstanten. Diese Grössen müssen, unter Berücksichtigung der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen, die sich dadurch finden, dass man y als Funktion in die Grenzgleichungen einsetzt, so bestimmt werden, dass der gefundene Werth ein M. M. ist. Die so zu lösende Aufgabe ist nunmehr ganz einfach die der sogenannten relativen Maxima oder Minima (M. M.) der gewöhnlichen Differentialrechnung, wird also nach den dortigen Lehren behandelt, wodurch denn auch die ganze Aufgabe erledigt ist **).

Grenzwerthe unter dem Integralzeichen.

III. Es kann sich ereignen, dass in der Funktion f, welche in dem Integrale (a) vorkommt, die Grenzwerthe x_1, x_2, oder die entsprechenden Werthe von y, enthalten sind. Dies ändert aber an den so eben aufgestellten Vorschriften nicht das Geringste. Diese Grössen

*) Daraus folgt von selbst, dass die „Grenzgleichungen" nicht y' enthalten dürfen, da man sonst y (für die Grenzwerthe von x) nicht daraus ziehen könnte, was doch als möglich angenommen ist (vergl. Note zu §. 3, IX.).

**) Da sich meistens Alles so verhält, dass wenn man x_1, x_2 fest denkt, man geradezu die in dem Früheren gelöste Aufgabe hat, so werden endgiltig blos diese zwei Grössen als wirklich zu bestimmen übrig bleiben, so dass man eigentlich ein M. M. für eine Funktion zweier Veränderlichen hat (vergl. die Noten zu §. 7, VII.; §. 9. VI.).

sind eben zunächst als Konstanten zu behandeln, und bei dem endgiltigen Problem treten sie dann natürlich mit ein. (Selbstverständlich dürfen die Grenzwerthe von y' nicht vorkommen.)

Entscheidung, ob Maximum oder Minimum.

IV. Auch hier gelten die früheren Regeln. Es ist natürlich angenommen, dass die endgiltig gelöste Aufgabe eine solche, bei der von einem M. M. die Rede ist, war. Denken wir uns also die Grenzwerthe fest (wenn auch noch nicht bestimmt), so musste man entweder ein Maximum, oder auch ein Minimum haben, was nach §. 4 *zu entscheiden ist, wobei die Konstanten noch unbestimmt bleiben sollen.* Die Bestimmung derselben (II.) hat dann so zu geschehen, dass wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt, was nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung entschieden wird. Begreiflich darf die letzte Entscheidung mit der ersten nicht in Widerspruch stehen, wenn die Aufgabe lösbar sein soll.

Zusatz.

V. *Die* früher gelöste Aufgabe, da x_1, x_2 und die zugehörigen Werthe von y, die y_1, y_2 heissen mögen, fest sind, gehört nicht unter II. Denn die Bedingungen

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ y_1 = h,\ y_2 = k,$$

in denen für y die gefundene Funktion $\varphi(x, c_1, c_2)$ eingesetzt wird, wodurch sie heissen:

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ \varphi(x_1, c_1, c_2) = h,\ \varphi(x_2, c_1, c_2) = k$$

bestimmen x_1, x_2, c_1, c_2, so dass hier von einem relativen Maximum *oder* Minimum keine Rede mehr sein kann.

Beispiele werden das Verfahren am besten erläutern, wobei als allgemeiner Grundsatz festzuhalten ist, dass alle zu bestimmenden Grössen auch wirklich müssen bestimmt werden können, wenn die vorgelegte Aufgabe soll lösbar sein.

§. 7.

1. Kürzeste Linie in einer Ebene.

I. Von einem festen Punkte aus soll an eine gegebene Kurve eine kürzeste Kurve gezogen werden (Alles in einer Ebene).

Nach §. 6 und §. 5, I. ist die gesuchte Kurve eine Gerade, deren Gleichung sei

$$y = c_1 x + c_2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(a)}$$

Die Koordinaten des festen Endpunktes seien a, η; die Gleichung der gegebenen Kurve:

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(b)}$$

Ist x_2 die Abscisse des anderen Endpunktes, y_2 die zugehörige Ordinate $(= c_1 x_2 + c_2)$, so sind c_1, c_2, x_2 so zu bestimmen, dass das Integral

$$\int_a^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = (x_2 - a)\sqrt{1 + c_1^2}$$

ein Minimum wird und zugleich

$$\varphi(x_2, c_1 x_2 + c_2) = 0,\ \eta = c_1 a + c_2 \quad \dots\dots \quad (\alpha)$$

ist. Dazu gehört, wenn k_1, k_2 noch zu bestimmende Konstanten sind, dass man

$$(x_2 - a)\sqrt{1 + c_1^2} + k_1 \varphi(x_2, c_1 x_2 + c_2) + k_2(\eta - c_1 a - c_2)$$

nach x_2, c_1, c_2 differenzire, die Differentialquotienten Null setze und mit (α) verbinde *). Dies liefert

$$\sqrt{1 + c_1^2} + k_1\left[\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} c_1\right] = 0,\ (x_2 - a)\frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}$$
$$+ k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} x_2 - a k_1 = 0,\ k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - k_2 = 0,$$

wo $y_2 = c_1 x_2 + c_2$ ist.

Hieraus

$$k_2 = k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2};$$

$$(x_2 - a)\frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}} + k_1 (x_2 - a)\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0,\ k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = -\frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}};$$

$$\sqrt{1 + c_1^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} c_1\right] = 0;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0.$$

Demnach hat man x_2, c_1, c_2 aus

$$\varphi(x_2, y_2) = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0,\ \eta = c_1 a + c_2,\ y_2 = c_1 x_2 + c_2 \quad (\beta)$$

zu bestimmen, was gerade ausreicht.

---

*) Natürlich könnte man aus der zweiten Bedingungsgleichung (α) auch c_2 ziehen und in die erste einsetzen, wodurch nur

$$\varphi(x_2, c_1 x_2 - c_1 a - \eta) = 0$$

bleiben würde, wie dies später in (α') geschieht.

Die zweite dieser Gleichungen sagt aus, dass die Gerade (a) in die Richtung der Normale an die Kurve (b) im Punkte (x_2, y_2) falle. **Demnach steht die Gerade auf der Kurve senkrecht.**

II. Ob man nun wirklich ein Maximum oder Minimum habe, ist dahin zu untersuchen, ob der Ausdruck $(x_2 - a)\sqrt{1 + c_1^2}$ ein solches werde, wenn man für x_2 und c_1 die aus (β) gefundenen Werthe einsetzt. Dabei ist zu beachten, dass eine erste Entscheidung schon in §. 5, I. gefällt wurde. Da die (α) durch

$$\varphi(x_2, c_1 x_2 + \eta - c_1 a) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha')$$

ersetzt werden können, so ist c_1 als Funktion von x_2 anzusehen, und wenn

$$K = (x_2 - a)\sqrt{1 + c_1^2},$$

so liegt die Entscheidung im Zeichen von $\frac{d^2 K}{d x_2^2}$.

Aber

$$\frac{dK}{dx_2} = \sqrt{1 + c_1^2} + (x_2 - a)\frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}\frac{\partial c_1}{\partial x_2}, \quad \frac{d^2 K}{d x_2^2} = \frac{2 c_1}{\sqrt{1 + c_2^2}}\frac{\partial c_1}{\partial x_2}$$

$$+ \frac{(x_2 - a)}{(1 + c_1^2)^{3/2}}\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{(x_2 - a)c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\left[(x_2 - a)\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + c_1\right] = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2}\left[(x_2 - a)\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + c_1\right]$$

$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\left[(x_2 - a)\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + c_1\right]^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\left[2\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + (x_2 - a)\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2}\right] = 0.$$

Hieraus

$$(x_2 - a)\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + c_1 = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\left[2\frac{\partial c_1}{\partial x} + (x_2 - a)\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2}\right] = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}$$

$$+ 2\,\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2};$$

d. h.

$$\left[(x_2 - a)\frac{\partial c_1}{\partial x} + c_1\right]\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \quad \left[2\frac{\partial c_1}{\partial x} + (x_2 - a)\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2}\right]\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^3$$

$$= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2.$$

Da es sich nur um das Zeichen von $\frac{d^2K}{dx_2^2}$ handelt, so kann man diese Grösse füglich mit $(1 + c_1^2)^{3/2}$ multipliciren und untersucht das Zeichen von

$$2c_1(1+c_1^2)\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + (x_2 - a)\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2}\right)^2 + (x_2 - a)c_1(1+c_1^2)\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2},$$

d. h. von

$$(x_2 - a)\left(\frac{\partial c_1}{\partial x_2}\right)^2 + (1+c_1^2)c_1\left[2\frac{\partial c_1}{\partial x_2} + (x_2 - a)\frac{\partial^2 c_1}{\partial x_2^2}\right],$$

d. h. von

$$\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + c_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2}{(x_2 - a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2}$$

$$+ c_1(1+c_1^2)\frac{\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2 - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^3},$$

oder da $\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = c_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, das von

$$\frac{(1+c_1^2)^2}{(x_2 - a)c_1^2} + c_1(1+c_1^2)\frac{\left[2c_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}c_1^2 - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right]}{c_1^3\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}},$$

oder endlich, da c_1^2 positiv und ebenso $1 + c_1^2$, das Zeichen von

$$\frac{(1+c_1^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - (x_2 - a)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}c_1^2 - 2c_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}} \qquad (\gamma)$$

wo wir $x_2 - a > 0$ voraussetzen, da sonst die Länge

$$K = -(x_2 - a)\sqrt{1 + c_1^2}$$

zu setzen wäre.

Fällt (γ) positiv aus, so hat man ein Minimum; fällt dagegen diese Grösse negativ aus, ein Maximum. Der Natur der Aufgabe gemäss ist nur das Erste zu beachten.

III. Wäre etwa die gegebene Kurve ein Kreis: $x^2 + y^2 = r^2$, so wäre

$$\varphi = x^2 + y^2 - r^2;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2;$$

also die (γ):

$$\frac{(1+c_1^2)\,x_2-(x_2-a)\,(c_1^2+1)}{x_2}=\frac{a\,(1+c_1^2)}{x_2},$$

und die Entscheidung liegt im Zeichen von $\frac{a}{x_2}$. Die (β) sind

$$x_2^2+y_2^2=r^2,\ y_2-c_1\,x_2=0,\ \eta=c_1\,a+c_2,\ y_2=c_1x_2+c_2.$$

Daraus

$$y_2=c_1\,x_2;\ x_2^2\,(1+c_1^2)=r^2;\ c_2=0;\ c_1=\frac{\eta}{a};$$

$$x_2^2\,(a^2+\eta^2)=r^2a^2,\ x_2=\pm\frac{a\,r}{\sqrt{a^2+\eta^2}},\quad \frac{x_2}{a}=\pm\frac{r}{\sqrt{a^2+\eta^2}}.$$

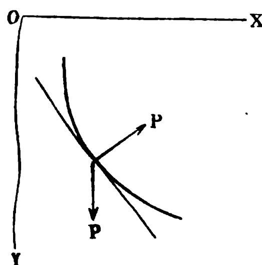
Das Zeichen von $\frac{x_2}{a}$ ist nun entscheidend und da man blos ein Minimum heben soll, so muss das obere gelten, d. h. es ist

$$x_2=\frac{a\,r}{\sqrt{a^2+\eta^2}}\ \text{und die Gerade: } y=\frac{\eta}{a}\,x.$$

2. Kurve des schnellsten Falls (Brachistochrone).

IV. **Man soll in einer Vertikalebene diejenige Kurve bestimmen, in der ein schwerer Punkt (vom Gewichte p) in der kürzesten Zeit von einem Punkte zum anderen gelangt, wenn er blos durch sein eigenes Gewicht bewegt wird.**

Fig. 4.



Sei die Axe der x horizontal, die y-Axe vertikal im Sinne der Schwere, P der Druck auf die Kurve, so ist bekanntlich

$$\frac{p}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-P\cos\alpha,\ \frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=p-P\sin\alpha;$$

$$\cos\alpha\,\frac{dx}{dt}+\sin\alpha\,\frac{dy}{dt}=0.$$

Daraus

$$\frac{p}{g}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}\right]=p\,\frac{dy}{dt};\ \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=y+c.$$

Bezeichnen wir nun den Anfangswerth von x durch x_1 (§. 6), den zugehörigen von y durch η, und durch b die Geschwindigkeit in diesem (Ausgangs-) Punkte, wo b gegeben sei; so ist

$$\frac{1}{2g}b^2 = \eta + c,\ c = \frac{b^2}{2g} - \eta,$$

also

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2g(y-\eta) + b^2;$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2g(y-\eta) + b^2;\ \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y-\eta)+b^2}},$$

wo wir die Wurzel nur positiv nehmen, da wir t und x zugleich wachsend denken.

Ist also x_2 die Endabszisse, τ die Dauer des Falls, so hat man

$$\tau = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2g(y-\eta)+b^2}},\ x_2 > x_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

welche Grösse nun ein Minimum werden soll.

Dabei ist der Fall des §. 6, III. eingetreten, da η der (untere) Grenzwerth von y ist. Hier hat man (§. 6, I.)

$$f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y-\eta)+b^2}}$$

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y-\eta)+b^2}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(y-\eta)+b^2}},$$

so dass (§. 3, VII.)

$$c_1 = \sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(y-\eta)+b^2};\ \frac{c_1^2}{2g(y-\eta)+b^2} - 1 = y'^2,$$

$$y' = \pm\frac{\sqrt{c_1^2 - 2g(y-\eta) - b^2}}{\sqrt{2g(y-\eta)+b^2}},\ \frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{\frac{2g(y-\eta)+b^2}{c_1^2 - [2g(y-\eta)+b^2]}}, \quad \text{(d)}$$

wo nun (da x immer wächst) das obere Zeichen gilt, so lange y wächst, das untere, wenn y abnimmt. Da $2g(y-\eta)+b^2$ wesentlich positiv war, nämlich $= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, so kann ein Wechsel dann eintreten, wenn der Nenner durch Null geht. Dieser Wechsel tritt also nur ein, wenn

$$2g(y-\eta) + b^2 = c_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

ist. Um (d) zu integriren, setzen wir

$$2g(y-\eta) + b^2 = \tfrac{1}{2}c_1^2(1-\cos\omega) \quad \ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

was zulässig ist, da immer $2g(y-\eta)+b^2 \overline{\gtrless} c_1^2$ sein muss. Diese Grösse wird c_1^2, wenn $\cos\omega = -1$, also $\omega = \pi$, so dass der Zeichenwechsel in (d) für $\omega = \pi$ stattfindet. Da anfänglich $y = \eta$, also $2g(y-\eta)+b^2 = b^2$, so ist dann $\frac{1}{2}c_1^2(1-\cos\omega) = b^2$, was

einen Werth $\cos\omega = 1 - \frac{2b^2}{c_1^2}$ liefert, der ω zwischen 0 und π giebt. Wir werden nun ω überhaupt innerhalb der Grenzen ω_1 und $2\pi + \omega_1$ nehmen, wenn ω_1 der Anfangswerth ist, innerhalb welcher Grenzen $\frac{1}{2}c_1^2\,(1 - \cos\omega)$ nur einmal gleich c_1^2 wird. In (d) gilt dann das obere Zeichen von ω_1 bis π, das untere im weiteren Verlaufe, vorausgesetzt, dass anfänglich x und y wachsen, was wir offenbar annehmen dürfen.

Da

$$x = c_2 \pm \int \sqrt{\frac{2g\,(y-\eta) + b^2}{c_1^2 - [2g(y-\eta) + b^2]}}\,\partial y,$$

so ist

$$x = c_2 \pm \int \sqrt{\frac{\frac{1}{2}c_1^2\,(1 - \cos\omega)}{c_1^2 - \frac{1}{2}c_1^2(1 - \cos\omega)}}\,\frac{\frac{1}{2}c_1^2 \sin\omega}{2g}\,\partial\omega$$

$$= c_2 \pm \frac{c_1^2}{4g}\int \sqrt{tg^2 \tfrac{1}{2}\omega}\,\sin\omega\,\partial\omega.$$

Aber $\sqrt{tg^2 \frac{1}{2}\omega} = tg\,\frac{1}{2}\omega$ von ω_1 bis π; dann $\sqrt{tg^2 \frac{1}{2}\omega} = -tg\,\frac{1}{2}\omega$ (vergl. V., wonach ω unter 2π), so dass allgemein

$$x = c_2 + \frac{c_1^2}{4g}\int tg\,\tfrac{1}{2}\omega\,\sin\omega\,\partial\omega = c_2 + \frac{c_1^2}{2g}\int \sin^2\tfrac{1}{2}\omega\,\partial\omega$$

$$= c_2 + \frac{c_1^2}{4g}\,(\omega - \sin\omega).$$

Demnach endlich ist das Integralsystem von (d):

$$x = c_2 + \frac{c_1^2}{4g}\,(\omega - \sin\omega),\quad y - \eta + \frac{b^2}{2g} = \frac{c_1^2}{4g}\,(1 - \cos\omega),$$

oder wenn $\frac{c_1^2}{4g} = r$ (positiv), $c_2 = -c + x_1$:

$$x - x_1 + c = r\,(\omega - \sin\omega),\quad y - \eta + \frac{b^2}{2g} = r\,(1 - \cos\omega) \quad . \; . \quad (g)$$

wo nun c, r die beiden eingetretenen Konstanten sind (x und y anfänglich wachsend). Dieses System stellt eine Zykloide vor, deren erzeugender Kreis den Halbmesser r hat, und der auf einer Geraden parallel der x-Axe (der horizontalen) rollt. (Die Zykloide beginnt in dem Punkte, dessen Koordinaten $x_1 - c$, $\eta - \frac{b^2}{2g}$ sind.)

V. Um nun in Bezug auf M. M. zu entscheiden (§. 4), ist zunächst

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{3/2}\,\sqrt{2g\,(y-\eta) + b^2}},\ \text{immer positiv},$$

man kann also ein Minimum erwarten. Dann hat man $\frac{\partial y}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ zu bilden. Zu dem Ende muss man ω aus der ersten (g) ziehen, mithin als von c und r abhängig ansehen, und in die zweite einsetzen. So ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{\partial r} = 1 - \cos\omega + r \sin\omega \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \frac{\partial y}{\partial c} = r \sin\omega \frac{\partial \omega}{\partial c};$$

$$1 = r(1 - \cos\omega)\frac{\partial \omega}{\partial c}, \quad 0 = \omega - \sin\omega + r(1 - \cos\omega)\frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

Daraus

$$\frac{\partial y}{\partial r} = 1 - \cos\omega - \frac{\omega - \sin\omega}{1 - \cos\omega}\sin\omega = 2 - \frac{\omega \sin\omega}{1 - \cos\omega},$$

$$\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega}; \quad m\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{(m - \omega)\sin\omega}{1 - \cos\omega} + 2$$

$$= (m - \omega)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\omega + 2.$$

Hier muss es nun möglich sein, m so zu bestimmen, dass diese Grösse nicht Null wird innerhalb der Integrationsgrenzen. Dazu würde gehören, dass

$$m = \omega - 2\,tg\,\tfrac{1}{2}\omega.$$

Durchläuft nun ω alle Werthe von ω_1 bis $2\pi + \omega_1$, also $tg\frac{1}{2}\omega$ von $tg\frac{1}{2}\omega_1$ bis $tg(\pi + \frac{1}{2}\omega_1)$, so läuft die zweite Seite von $\omega_1 - 2\,tg\,\frac{1}{2}\omega_1$ bis $-\infty$, springt dann zu $+\infty$ und geht bis $2\pi + \omega_1 - tg\frac{1}{2}\omega_1$.

Ist also $\omega_1 - 2\,tg\frac{1}{2}\omega_1$ positiv oder negativ, so werden in beiden Fällen die Werthe zwischen $\omega_1 - 2\,tg\,\frac{1}{2}\omega_1$ und $2\pi + \omega_1 - 2\,tg\frac{1}{2}\omega_1$ nicht getroffen. Daraus geht hervor, dass es genügt, m einen der Werthe, die zwischen diesen eben genannten Grössen liegen, beizulégen.

Wenn also nicht mehr als 2π als Unterschied der Grenzwerthe von ω vorkommt, so hat man ein Minimum (hinsichtlich der ersten Entscheidung).

Wir haben nunmehr die Bestimmung der Konstanten zu erörtern. Dabei ist jetzt

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y - \eta) + b^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}c_1^2(1 - \cos\omega)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2 - 2\cos\omega}{(1 - \cos\omega)^2}}}{\sqrt{2gr(1 - \cos\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{gr}(1 - \cos\omega)} = \frac{1}{2\sqrt{gr}\sin^2\frac{1}{2}\omega},$$

$$\int f\,dx = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int\frac{1-\cos\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\omega}\,d\omega = \sqrt{\frac{r}{g}}\int d\omega = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\omega,$$

so dass, wenn ω_1, ω_2 die äussersten Werthe von ω sind:

$$\tau = \sqrt{\frac{r}{g}}\,(\omega_2 - \omega_1).$$

Ferner ist zu beachten, dass aus dem Werthe von $\frac{dt}{dx}$ folgt, dass der Körper wieder zurückgeht, wenn

$$2g\,(y-\eta) + b^2 = 0$$

wird. Es ist nämlich genau genommen ebenfalls

$$\frac{dt}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y-\eta)+b^2}},$$

und der Zeichenwechsel (also Rückgang von x) tritt ein, wenn der Nenner Null wird. Aber es ist $2g\,(y-\eta)+b^2 = \frac{1}{2}c_1\,(1-\cos\omega)$, welche Grösse Null ist für $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$. Demnach wird die Bewegung endgiltig so erfolgen, dass ω zwischen 0 und 2π schwankt, mithin eine volle Zykloide durchlaufen wird *).

Ist also auch für den Ausgangspunkt nicht gerade $\omega_1 = 0$, so *ist doch ω_2 nicht* über 2π, woraus auch sofort die obige Bedingung des Minimums als erfüllt hervorgeht. Für unsere Aufgabe ist natürlich nur ein Stück dieses Weges zu betrachten.

VI. Sind nun die Endpunkte fest, so hat man keine weitere Untersuchung mehr zu führen, da dann entschieden ein Minimum vorhanden ist. Es sind vielmehr nur noch die Konstanten r und c zu bestimmen.

Sind x_2, ζ die (gegebenen) Koordinaten des Endpunktes, so hat man

$$c = r(\omega_1 - \sin\omega_1),\ \frac{b^2}{2g} = r(1-\cos\omega_1),\ x_2 - x_1 + c = r(\omega_2 - \sin\omega_2),$$

$$\zeta - \eta + \frac{b^2}{2g} = r\,(1 - \cos\omega_2),$$

woraus c, r, ω_1, ω_2 (letztere zwischen 0 und 2π) zu bestimmen sind. Es ist

$$x_2 - x_1 = r\,[\omega_2 - \sin\omega_2 - (\omega_1 - \sin\omega_1)],\ \zeta - \eta = r\,(\cos\omega_1 - \cos\omega_2),$$

*) Ist die Anfangsgeschwindigkeit b Null, so ist ohnehin $\omega_1 = 0$; allein wenn dies auch nicht der Fall ist, so würde, wenn eine fortdauernde Bewegung erfolgt, doch ein Hin- und Herschwanken zwischen 0 und 2π erfolgen. Unsere jetzige Aufgabe hat freilich mit dieser Untersuchung nichts zu thun.

$$\frac{x_2 - x_1}{\zeta - \eta} = \frac{\omega_2 - \omega_1 - (\sin\omega_2 - \sin\omega_1)}{\cos\omega_1 - \cos\omega_2}.$$

Zugleich

$$\frac{2g(\zeta - \eta) + b^2}{b^2} = \frac{1 - \cos\omega_2}{1 - \cos\omega_1} = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}\omega_2}{\sin\frac{1}{2}\omega_1}\right)^2,$$

so dass wenn

$$\frac{2g(\zeta - \eta) + b^2}{b^2} = a^2: \sin\tfrac{1}{2}\omega_2 = a\sin\tfrac{1}{2}\omega_1,$$

weil $\frac{1}{2}\omega_2 < \pi$. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{x_2 - x_1}{\zeta - \eta} = \frac{\omega_2 - \omega_1 - (\sin\omega_2 - \sin\omega_1)}{\cos\omega_1 - \cos\omega_2}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\omega_2 = a\sin\tfrac{1}{2}\omega_1$$

kann man dann durch Näherung ω_1, ω_2 (beide zwischen 0 und 2π. $\omega_2 > \omega_1$) ermitteln. Dann ergeben sich r und c sofort.

Für den besonderen Fall, da $b = 0$, der bewegte Punkt also ohne Anfangsgeschwindigkeit ist, hat man $\omega_1 = 0$, also auch $c = 0$ und dann

$$\frac{x_2 - x_1}{\zeta - \eta} = \frac{\omega_2 - \sin\omega_2}{1 - \cos\omega_2}, \quad r = \frac{x_2 - x_1}{\omega_2 - \sin\omega_2}.$$

Wäre hier $\zeta = \eta$, so wäre auch $\omega_2 = 2\pi$, wie natürlich.

Endlich aber könnte $x_2 = x_1$ gegeben sein. Dadurch würde

$$r(\omega_1 - \sin\omega_1) = r(\omega_2 - \sin\omega_2)$$

sein, was im Allgemeinen unzulässig ist. Allein auch die Formel (c), von der wir ausgiengen, ist jetzt nicht zur Benutzung geeignet.

In diesem Falle würde man zweckmässiger

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right] = 2g(y - \eta) + b^2,$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}{2g(y - \eta) + b^2}, \quad \tau = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}{2g(y - \eta) + b^2}\, dy$$

setzen, wo nun x, y ihre Rollen getauscht hätten, und freilich angenommen ist, dass y nur wächst, welche Annahme diesmal aber in der Natur der Sache begründet ist.

Jetzt wäre (x als abhängig, y als unabhängig angesehen) nach §. 3, VI.:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = c_1, \frac{\frac{dx}{dy}}{\sqrt{2g(y - \eta) + b^2}} = c_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2};$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{c_1^2 [2g(y-\eta)+b^2]}{1-c_1^2[2g(y-\eta)+b^2]},$$

$$x = c_2 \pm c_1 \int \frac{2g(y-\eta)+b^2}{\sqrt{1-c_1^2[2g(y-\eta)+b^2]}}\,dy.$$

Der Endwerth von x soll nun derselbe sein, wie der Anfangswerth; daraus folgt sofort, dass $c_1 = 0$, $x = c_2$ sein wird, da man sonst wieder in der obigen als unzulässig erkannten Auflösung wäre. Jetzt hätte man also eine vertikale Gerade.

VII. Seien nun zwei Kurven in der Vertikalebene gegeben, in denen der Ausgangs- und der Endpunkt der Zykloide liegen soll. Alsdann hat man die Koordinaten dieser beiden Punkte und c, r so zu bestimmen, dass τ ein Minimum wird.

Das Verfahren, das wir, gegenüber dem vorigen Beispiele, hier einhalten wollen, ist allgemeiner Art, und es mag desshalb dieses Beispiel gewissermaassen als Muster dienen.

Seien die Koordinaten des Ausgangspunktes: x_1, η; des Endpunktes: x_2, ζ; so sind η, ζ Funktionen von c, r und η dazu von x_1, ζ von x_2, so wie die Gleichung der Zykloide dies liefert. Sind dann

$$\varphi(x, y) = 0, \ \psi(x, y) = 0$$

die Gleichungen der beiden Kurven, so hat man x_1, x_2, c, r so zu bestimmen, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx \text{ ein Minimum, wo } f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y-\eta)+b^2}},$$

und zugleich

$$\varphi(x_1, \eta) = 0, \ \psi(x_2, \zeta) = 0 \text{*)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Man wird also

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx + k_1 \varphi(x_1, \eta) + k_2 \psi(x_2, \zeta)$$

nach x_1, x_2, c, r differenziren und die Differentialquotienten Null setzen, wodurch in Verbindung mit (α) die nöthigen Gleichungen erhalten werden.

Nun ist, da η von x_1, c, r (vermöge der Gleichung der Zykloide) abhängt:

---

*) Wo η, ζ Funktionen von x_1, x_2, c, r sind, wie sie aus den Gleichungen (g) folgen würden, wenn man aus diesen ω eliminirt hätte.

$$\frac{d}{dx_2}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \sum^{x=x_2} f;\quad \frac{d}{dx_1}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\,dx - \sum^{x=x_1} f;$$

$$\frac{d}{dc}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial c}\right] dx,$$

$$\frac{d}{dr}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right] dx.$$

Da aber (§. 3, III.)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right);\quad \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{d y'}\frac{\partial y}{\partial c}\right),$$

so sind die letzten Ausdrücke:

$$\frac{d}{dc}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial c}\,dx + \sum_{x=x_1}^{x=x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial c}\right),$$

$$\frac{d}{dr}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r}\,dx + \sum_{x=x_1}^{x=x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial r}\right).$$

Demgemäss hat man zur Bestimmung von x_1, x_2, c, r:

$$\sum^{x=x_2} f + k_2\left[\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\right] = 0,\quad \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\,dx - \sum^{x=x_1} f$$

$$+ k_1\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial c}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\,dx + \sum_{x=x_1}^{x=x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial c}\right) + k_1\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial c} + k_2\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial c} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial r}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\,dx + \sum_{x=x_1}^{x=x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial r}\right) + k_1\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r} + k_2\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0,$$

wo, wie bereits bemerkt, y aus der Gleichung der Zykloide einzusetzen ist.

Da

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(y-\eta)+b^2}\,\sqrt{1+y'^2}}$$

$$= \frac{\sin\omega}{\sqrt{2gr(1-\cos\omega)}\,\sqrt{(1-\cos\omega)^2+\sin^2\omega}} = \frac{\sin\omega}{2\sqrt{rg}\,(1-\cos\omega)}$$

$$= \frac{cotg \frac{1}{2} \omega}{2 \sqrt{rg}}; \quad \frac{\partial y}{\partial c} = r \sin \omega \frac{\partial \omega}{\partial c}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1 - \cos \omega + r \sin \omega \frac{\partial \omega}{\partial r};$$

$$1 = r(1 - \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial c}, \quad 0 = \omega - \sin \omega + r(1 - \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial r},$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega} = cotg \tfrac{1}{2} \omega, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{(1 - \cos \omega)^2 - \sin \omega (\omega - \sin \omega)}{1 - \cos \omega}$$

$$= \frac{2(1 - \cos \omega) - \omega \sin \omega}{1 - \cos \omega},$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{cotg^2 \frac{1}{2} \omega}{2 \sqrt{rg}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{cotg \frac{1}{2} \omega}{\sqrt{rg}} - \frac{\omega \, cotg^2 \frac{1}{2} \omega}{2 \sqrt{rg}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{g \sqrt{1 + y'^2}}{[2g(y - \eta) + b^2]^{3/2}} = \frac{g \sqrt{2(1 - \cos \omega)}}{(1 - \cos \omega)[2gr(1 - \cos \omega)]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{(1 - \cos \omega)^2 2r \sqrt{rg}},$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial \eta} dx = \int \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{dx}{d\omega} d\omega = \int \frac{d\omega}{2 \sqrt{rg} (1 - \cos \omega)} = - \frac{1}{2 \sqrt{rg}} cotg \tfrac{1}{2} \omega.$$

Die Grössen

$\frac{\partial \eta}{\partial c}, \frac{\partial \eta}{\partial r}$ sind gleich $\overset{x = x_1}{\underset{}{\mathsf{Z}}} \frac{\partial y}{\partial c}, \overset{x = x_1}{\mathsf{Z}} \frac{\partial y}{\partial r}$; ebenso $\frac{\partial \xi}{\partial c}, \frac{\partial \xi}{\partial r}$ für $x = x_2$;

was aber $\frac{\partial \eta}{\partial x_1}$ betrifft, so ist diese Grösse offenbar gleich y' für $x = x_1$; eben so

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_2} = \overset{x = x_2}{\mathsf{Z}} y', \quad y' = cotg \tfrac{1}{2} \omega.$$

Endlich ist

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y - \eta) + b^2}} = \frac{1}{2 \sqrt{rg} \sin^2 \frac{1}{2} \omega}.$$

Setzt man alle diese Werthe in obige Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{2 \sqrt{gr} \sin^2 \frac{1}{2} \omega_2} + k_2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + cotg \tfrac{1}{2} \omega_2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] = 0,$$

$$- \frac{1}{2 \sqrt{gr} \sin^2 \frac{1}{2} \omega_1} + \frac{1}{2 \sqrt{rg}} (cotg \tfrac{1}{2} \omega_1 - cotg \tfrac{1}{2} \omega_2) \, cotg \tfrac{1}{2} \omega_1$$

$$+ k_1 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + cotg \tfrac{1}{2} \omega_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] = 0,$$

$$\frac{cotg\frac{1}{2}\omega_1}{2\sqrt{gr}}\left[cotg\tfrac{1}{2}\omega_1 - cotg\tfrac{1}{2}\omega_2\right] + \frac{1}{2\sqrt{gr}}\left[cotg^2\tfrac{1}{2}\omega_2 - cotg^2\tfrac{1}{2}\omega_1\right]$$
$$+ k_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_1 + k_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{gr}}\left[cotg\tfrac{1}{2}\omega_1 - cotg\tfrac{1}{2}\omega_2\right](2-\omega_1\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_1) + \frac{cotg\frac{1}{2}\omega_2 - cotg\frac{1}{2}\omega_1}{\sqrt{rg}}$$
$$-\frac{\omega_2\,cotg^2\frac{1}{2}\omega_2 - \omega_1\,cotg^2\frac{1}{2}\omega_1}{2\sqrt{rg}} + k_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(2-\omega_1\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_1)$$
$$+ k_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(2-\omega_2\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_2) = 0.$$

Diese Gleichungen heissen, wenn man durchweg mit $2\sqrt{gr}$ multiplicirt und $2k\sqrt{rg}$ durch λ ersetzt:

$$\frac{1}{sin^2\frac{1}{2}\omega_2} + \lambda_2\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + cotg\tfrac{1}{2}\omega_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right] = 0,$$

$$-(1+cotg\tfrac{1}{2}\omega_1\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_2) + \lambda_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + cotg\tfrac{1}{2}\omega_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right] = 0,$$

$$cotg\tfrac{1}{2}\omega_2\,(cotg\tfrac{1}{2}\omega_2 - cotg\tfrac{1}{2}\omega_1) + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}cotg\tfrac{1}{2}\omega_1 + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}cotg\tfrac{1}{2}\omega_2 = 0,$$

$$cotg\tfrac{1}{2}\omega_2\,(\omega_1\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_1 - \omega_2\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_2) + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(2-\omega_1\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_1)$$
$$+ \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(2-\omega_2\,cotg\tfrac{1}{2}\omega_2) = 0.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt:

$$cotg\tfrac{1}{2}\omega_2 + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0, \quad -cotg\tfrac{1}{2}\omega_2 + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0,$$

woraus dann

$$\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -1, \quad \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 1,$$

und hieraus:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = cotg\tfrac{1}{2}\omega_2\,\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = cotg\tfrac{1}{2}\omega_2\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}.$$

Ist α_1 der Winkel, den die Tangente an die (obere) erste Grenzkurve macht mit der Abszissenaxe (für den Ausgangspunkt), α_2 der. den eben so die Tangente an die zweite Grenzkurve macht mit der Abszissenaxe (für den Endpunkt), so ist

$$tg\,\alpha_2 = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x_2}}{\frac{\partial\psi}{\partial\xi}}, \quad tg\,\alpha_1 = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}};$$

und wenn φ_2 der Winkel ist, welchen die Zykloide im Endpunkte mit der Abszissenaxe macht, wo $tg\,\varphi_2 = cotg\,\frac{1}{2}\,\omega_2$, so heissen die beiden letzten Gleichungen:

$$-1 = tg\,\alpha_2\,tg\,\varphi_2\,,\quad -1 = tg\,\alpha_1\,tg\,\varphi_2 \text{ also } \alpha_1 = \alpha_2,$$

und sagen aus, dass die Zykloide im Endpunkte senkrecht steht auf der Grenzkurve, während die Tangenten an die Grenzkurven in beiden Endpunkten parallel laufen *).

Allgemeine Bemerkung.

VIII. Das so eben gelöste Beispiel ist ein sehr allgemeines, da hier in der Funktion f selbst einer der Grenzwerthe vorkommt. Dadurch ist aber der Gang der Rechnung nicht im Geringsten beeinträchtigt worden.

Ist

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,\,y,\,y')\,dx$$

allgemein das Integral, das ein M. M. werden soll, und man soll dann $x_1\,x_2, c_1, c_2$ (die beiden Konstanten) bestimmen, so wird immer die Aufgabe auftreten, $\frac{dJ}{dc_1}$, $\frac{dJ}{dc_2}$ zu ermitteln. Enthält nun f keinen der Grenzwerthe, so ist

$$\frac{dJ}{dc} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c}\right]dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c}\right]dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial c}\right)dx = \sum_{x=x_1}^{x=x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial c}\right),$$

so dass das in VII. angewandte Verfahren, wie dort bemerkt, allgemein anwendbar ist. (Vergleiche hierzu §. 9, XIII.)

*) Für die letzte Entscheidung, ob wirklich ein Minimum vorhanden ist, würde man etwa c, r als Funktion von x_1, x_2 ansehen, wie dies die Gleichungen (α) liefern und nun $t = \int_{x_1}^{x_2} f dx$, wo y durch seinen Werth (in der Zykloide) ersetzt ist, als Funktion der zwei Grössen x_1, x_2, deren Werthe gefunden sind, behandeln, wo sich dann nach bekannten Regeln entscheiden lässt, ob man ein M. M. habe. Wir setzen die, wenn allgemein gehalten, nothwendig weitläufige Entwickelung nicht her, da sie einer besonderen Schwierigkeit nicht unterliegt.

Zweiter Abschnitt.

Relative Maxima oder Minima (isoperimetrische Aufgaben).

§. 8.

Stellung der Aufgabe.

I. Die Aufgabe, die uns hier gestellt ist, kann in folgender Form ausgesprochen werden.

Sei y als Funktion von x so zu bestimmen, dass

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

ein Maximum oder Minimum (M. M.) werde, wobei a, b feste, bekannte Grössen sind, und eben so die zugehörigen Werthe von y gegeben sind; zugleich aber sollen die Gleichungen

$$\int_a^b F_1(x, y, y')\, dx = A_1, \quad \int_a^b F_2(x, y, y')\, dx = A_2, \ldots,$$

$$\int_a^b F_n(x, y, y')\, dx = A_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

stattfinden, wo $F_1, \ldots, F_n$ bekannte Funktionsformen, $A_1, \ldots, A_n$ gegebene Zahlen sind, und die Anzahl der Gleichungen (b) eine beliebige (n) ist.

Verfahren wir hier wieder nach den Grundsätzen des §. 2, und ziehen etwa die dortige Form (f) vor, so haben wir, wenn y die gesuchte Funktion bedeutet, in (a) für y zu setzen

$$y + \frac{\varepsilon}{1}\delta y + \frac{\varepsilon^2}{1 . 2}\delta^2 y + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

zugleich aber auch in den (b), da nicht nur das gesuchte y, sondern auch alle, die mit ihm verglichen werden, den (b) genügen sollen. Denn die Aufgabe, die uns vorliegt, wird in scharfer Form auch so gefasst werden müssen:

Unter allen Funktionen y, welche den (b) genügen, die zu finden, welche (a) zu einem M. M. macht.

Entwickelt man nun (a), wenn man (c) einsetzt, nach Potenzen von ε, und erhält

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx + \varepsilon\,\delta \int_a^b f(x, y, y')\, dx + \ldots,$$

so ist zugleich auch

$$\int_a^b F_r\, dx + \varepsilon\delta \int_a^b F_r\, dx + \cdots = A_r;\; r = 1, 2, \ldots, n,$$

und da die (b) stattfinden (für das gesuchte y, wie für alle mit ihm verglichenen):

$$\frac{\varepsilon}{1}\,\delta \int_a^b F_r dx + \frac{\varepsilon^2}{1.\,2}\,\delta^2 \int_a^b F_r\, dx + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Diese Gleichung kann bei beliebigem ε nur dann stattfinden, wenn jedes Glied für sich Null ist, also jedenfalls

$$\delta \int_a^b F_r dx = 0, \text{ d. h. } \int_a^b \left[\frac{\partial F_r}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F_r}{\partial y'}\,\delta y'\right] dx,$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F_r}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y\, dx = 0 \text{ (§. 3, III.)}, \quad . \quad . \quad \text{(d')}$$

wo immer $r = 1, 2, \ldots, n$. Da eine ähnliche Gleichung auch aus (a) folgt, so wird folglich δy, das in der betreffenden Gleichung [die (c') des §. 3] vorkommt, nicht ganz willkürlich bleiben, vielmehr den n Bedingungen (d') genügen müssen. Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit der Formen, die δy annehmen kann, darf solche Einschränkung immerhin obwalten, ohne dass δy geradezu bestimmt ist *).

Anders verhielte sich die Sache allerdings, wenn eine für jedes x, y giltige Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

vorliegen würde. Denn jetzt würde ja y als Funktion von x geradezu sich ergeben, und die Aufgabe könnte gar nicht gestellt werden. Dasselbe fände Statt, wenn die Gleichung auch noch $\frac{dy}{dx}$ enthalten

*) Insofern natürlich, als die gestellte Aufgabe überhaupt einer Lösung fähig ist, was wir begreiflich voraussetzen.

würde, da die Integration ebenfalls auf eine Gleichung zwischen x, y zurückführen würde, und man dann höchstens die Aufgabe stellen könnte, die eingetretene willkürliche Konstante so zu bestimmen, dass etwa (a) ein M. M. wird. Die (b) sind aber keineswegs Bedingungsgleichungen dieser Art zwischen x und y.

II. Der analytische Ausdruck der bedingten Willkürlichkeit von δy scheint nicht leicht durchführbar. Wir wollen uns desshalb die Sache in folgender Weise zurechtlegen.

Wird statt y in (a) die Form (c) eingeführt, was nach unseren früheren Entwickelungen zu geschehen hat, so müssen zugleich auch noch die (d) erfüllt sein. Diese letztern setzen die Grössen A in (b) unveränderlich, aber sonst beliebig, voraus. Man wird also jedenfalls y so zu finden haben, dass den (b) genügt wird, wobei die $A_1, \ldots, A_n$ vorläufig (in Bezug auf ihre Werthe) gleichgiltig sind, und dass zugleich (a) ein M. M. ist.

Da wir die Werthe von y für $x = a$ und b als gegeben ansehen, so müssen in die Auflösung zwei (vorerst willkürliche) Konstanten eintreten. Treten aber noch n weitere ein, die so bestimmt werden, dass die (b) erfüllt sind, so ist eine Hauptforderung erfüllt.

Den so nunmehr festgestellten Bedingungen lässt sich in folgender einfachen Weise genügen.

Seien $a_1, \ldots, a_n$ noch zu bestimmende Konstanten, von denen aber keine Null werden darf, insofern als die Gleichungen (b) nicht etwa aus einander abgeleitet werden können, so wollen wir y so bestimmen, dass

$$\int_a^b [f + a_1 F_1 + a_2 F_2 + \cdots + a_n F_n]\, dx \quad . \; . \; . \quad \text{(e)}$$

ein M. M. werde, wo f, $F_1 \ldots, F_n$ Abkürzungen für die in (a) und (b) vorkommenden Funktionsformen sind, und dass zugleich die Integrale

$$\int_a^b F_1\, dx, \int_a^b F_2\, dx, \ldots\ldots, \int_a^b F_n\, dx, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(e')}$$

unveränderliche Werthe behalten.

Denkt man sich für y die Form (c) gesetzt, so wird die Bedingung, dass die (e') unveränderliche Werthe haben, sofort die (d) geben; die Bedingung, dass (e) ein M. M. ist, liefert

$$\delta \int_a^b [f + a_1 F_1 + \cdots + a_n F_n]\, dx = 0,$$

d. h.

$$\delta\int_a^b f\,dx + a_1\delta\int_a^b F_1\,dx + \ldots + a_n\delta\int_a^b F_n\,dx = 0 \quad . \; . \; . \quad \text{(f)}$$

was, wegen der (d), die heissen

$$\delta\int_a^b F_r\,dx = 0,$$

zugleich, aber nur für die δy, welche den (d) genügen, giebt:

$$\delta\int_a^b f\,dx = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(f')}$$

Daraus geht hervor, dass die hier gegebene Auflösung allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Allgemeine Auflösung.

III. Soll demnach die in I. gestellte Aufgabe: y so zu bestimmen, dass (a) ein Maximum oder Minimum wird, und soll y nur aus den Funktionen gewählt werden, welche den (b) zugleich genügen (*besser: den (e') unveränderliche Werthe beilegen*), so wird man die Sache so ansehen, als sei das Integral (e), in dem $a_1, \ldots, a_n$ Konstanten sind, zu einem M. M. zu machen (§. 3) und die $a_1, \ldots, a_n$ *hierauf* so bestimmen, dass den (b) genügt wird, wo dann die (e') *natürlich* diese unveränderlichen Werthe haben *).

Die Entscheidung, ob Maximum oder Minimum, wird ganz nach §. 4 geführt, wo nur $f + a_1 F_1 + \cdots + a_n F_n$ an die Stelle von f tritt, und zwar mit den als konstant angesehenen, vorläufig aber beliebigen Werthen der $a_1, \ldots, a_n$, wobei die durch Integration eingeführten Konstanten c_1, c_2 noch willkürlich bleiben.

Denn für die δy, $\delta^2 y$, welche den (d) genügen, also

$$\delta\int_a^b F_r\,dx = 0, \; \delta^2\int_a^b F_r\,dx = 0$$

liefern, aber auch nur für diese, ist das Zeichen von

*) Es folgt aus unserer Darstellung in II., dass wenn man die unveränderlichen Werthe der (e') unbestimmt lässt, die $a_1, \ldots, a_n$ konstant, aber unbestimmt, bleiben. Die Grösse (e) zu einem M. M. gemacht, und die a nicht bestimmt, ist also die Lösung einer allgemeineren Aufgabe, die im Grunde hier behandelt wird.

$$\delta^2 \int_a^b [f + a_1 F_1 + \cdots + a_n F_n] \, dx$$

dasselbe, wie das von

$$\delta^2 \int_a^b f \, dx.$$

Da man nun das Zeichen der letzteren Grösse, immer mit Berücksichtigung der (d), zu untersuchen hätte, so ist unsere Behauptung gerechtfertigt. Da hierbei die A in den (b) noch beliebig sein können, so sind es auch die $a_1, \ldots, a_n$.

Zusatz.

IV. Jeder Werth von y, der (a) zu einem M. M. macht, insofern den Bedingungen (e′) genügt wird, macht ganz bestimmt auch (e) zu einem M. M., indem ja (e) heisst

$$\int_a^b f \, dx + a_1 \int_a^b F_1 \, dx + \cdots + a_n \int_a^b F_n \, dx.$$

Jeder Werth von y, der (e) zu einem M. M. macht, wird, insofern die (e′) berücksichtigt werden, nothwendig auch (a) zu einem M. M. machen.

Aber nicht jeder Werth, der kurzweg (a) zu einem M. M. macht, hat dieselbe Eigenschaft auch für (e).

Unter den Werthen, die also, je nach etwa weiteren Bedingungen, (a) zu einem M. M. machen, muss man unterscheiden zwischen solchen, die mit allen benachbarten verglichen werden dürfen (§. 2), und solchen, die nur mit einer Auswahl von benachbarten Funktionsformen zu vergleichen sind, was die in II. so genannte Bedingtheit von δy (und $\delta^2 y$) begründet.

Welches aber auch immer die analytische Formulirung dieser Bedingtheit (Auswahl) sei, so wird jeder Werth (von y in x), der nach der Vorschrift in III. erhalten wird, unsere Aufgabe lösen, und kein Werth, der dieselbe lösen kann, wird uns entgehen, wie dies aus den zu Eingang dieses Zusatzes ausgesprochenen Sätzen sofort hervorgeht.

Wenn es uns also auch gelingen sollte, δy analytisch zu formuliren so, dass die (d) erfüllt sind, so würden wir aus der (f′) keine anderen Werthe ziehen können, als wir durch unsere Vorschrift er-

halten, eine Vorschrift, die y völlig bestimmt und den vorgeschriebenen Bedingungen unterwirft.

Daraus folgt ganz von selbst, dass diese mehrfach genannte analytische Formulirung für uns von keinem Werthe ist, und somit ein Aufsuchen derselben die Auflösung unnützer Weise erschweren würde. Ohnehin hätte eine solche nur Bezug auf die Variationen δy, $\delta^2 y$, die ja doch endgiltig nur Hilfsgrössen sind.

Mit den „relativen Maxima und Minima" der gewöhnlichen Differentialrechnung hängt die uns vorliegende Aufgabe begreiflich nicht zusammen, da in jenem Falle Beziehungen zwischen den Veränderlichen selbst gegeben sind, was hier nicht in derselben Art stattfindet. Eine Zurückführung beider Aufgaben auf einander, die wohl versucht wurde und auch anscheinend möglich ist, wird desshalb vom eigentlichen Ziele ableiten, und wenn auch das in II. aufgestellte Ergebniss erhalten werden sollte, so lässt sich die Entscheidung, ob M. M., wie wir sie in III. fanden, damit nicht begründen.

Grenzbedingungen.

V. Sind die (Grenz-) Werthe a, b, oder die zugehörigen *Werthe von y nicht gegeben*, sondern unterliegen noch gewissen *Bedingungen, so treten* ganz die Untersuchungen des §. 6 in ihr Recht ein, immer das dortige f durch $f + a_1 F_1 + \ldots + a_n F_n$ ersetzt gedacht, wo die $a_1, \ldots, a_n$ konstant, aber von den weiter zu *bestimmenden* Grössen als unabhängig anzusehen sind. Dabei ist *natürlich* selbstverständlich, dass die Werthe der a, b in den (b) dieselben sind wie in (a). Auch die Entscheidung, ob M. M., wird ganz nach §. 6, IV. geführt.

Wir wenden uns nun zu Beispielen.

§. 9.

1. Kürzeste Linie bei gegebener Fläche.

I. Unter allen ebenen Kurven, welche zwischen sich, der Abszissenaxe und zwei Ordinaten denselben Raum einschliessen, die kürzeste zu finden.

$$f = \sqrt{1 + y'^2},\ F = y;\ \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = A;$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [\sqrt{1 + y'^2} + ay]\,dx \text{ ein Minimum.}$$

Also (§. 3, III.)

$$a - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0,$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = ax + c_1,\ y' = \pm \frac{ax + c_1}{\sqrt{1 - (ax + c_1)^2}},$$

wo jedoch nur das obere Zeichen gelten darf, da aus der unmittelbar vorhergehenden Gleichung sofort folgt, dass y' und $ax + c_1$ dasselbe Zeichen haben.

Demnach

$$y = c_2 + \int \frac{ax + c_1}{\sqrt{1 - (ax + c_1)^2}}\, dx = c_2 - \frac{1}{a}\sqrt{1 - (ax + c_1)^2},$$

d. h.

$$(ay - ac_2)^2 = 1 - (ax + c_1)^2,\ (ay - ac_2)^2 + (ax + c_1)^2 = 1\ . \quad . \quad \text{(a)}$$

Die gesuchte Kurve ist somit ein Kreis. Zur Bestimmung von a hat man

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[c_2 - \frac{1}{a}\sqrt{1 - (ax + c)^2}\right] dx = A \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Aus der Gleichung (a) würde folgen

$$y = c_2 \pm \frac{1}{a}\sqrt{1 - (ax + c_1)^2},$$

während thatsächlich nur das untere Zeichen gilt. Es ist also nur von einem Zweige des Kreises die Rede.

Um die Entscheidung hinsichtlich des M. M. zu treffen, ist

$$\frac{\partial^2 (f + aF)}{\partial y'^2} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{3/2}} \text{ immer positiv,}$$

was auf ein Minimum deutet (§. 4, V.).

Dann ist

$$\frac{\partial y}{\partial c_1} = \frac{ax + c_1}{a\sqrt{1 - (ax + c_1)^2}},\quad \frac{\partial y}{\partial c_2} = 1;$$

$$m\frac{\partial y}{\partial c_2} + \frac{\partial y}{\partial c_1} = m + \frac{ax + c_1}{a\sqrt{1 - (ax + c_1)^2}}.$$

Da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + c_1}{\sqrt{1 - (ax + c_1)^2}},$$

so wird die Grösse $\frac{ax + c_1}{a\sqrt{1 - (ax + c_1)^2}}$ nur dann alle Werthe von

$-\infty$ zu $+\infty$ durchlaufen, wenn das betrachtete Kreisstück ein voller Halbkreis ist. Dieser Fall ist somit ausgeschlossen. Dann aber ist m immer so bestimmbar, dass innerhalb der Integrationsgrenzen die Grösse $m\frac{\partial y}{\partial c_2}+\frac{\partial y}{\partial c_1}$ nicht Null wird.

II. Seien nun x_1, x_2 fest und eben so die zugehörigen Werthe von y.

Insofern der gefundene Bogen kein Halbkreis ist, hat man ein Minimum. Zur Bestimmung von a, c_1, c_2 hat man hier:

$$y_1=c_2-\frac{1}{a}\sqrt{1-(ax_1+c_1)^2},\ y_2=c_2-\frac{1}{a}\sqrt{1-(ax_2+c_1)^2},$$

$$A=c_2(x_2-x_1)-\frac{1}{2a^2}\Big[(ax_2+c_1)\sqrt{1-(ax_2+c_1)^2}$$
$$-(ax_1+c_1)\sqrt{1-(ax_1+c_1)^2}+arc(sin=ax_2+c_1)$$
$$-arc(sin=ax_1+c_1)\Big],$$

wobei zu beachten ist, dass wir $x_2-x_1>0$ voraussetzen.

Wir können hier füglich $x_1=0$ setzen, da dies nur einer Verlegung der Ordinatenaxe gleichkommt. Dann aber wollen wir auch $y_1=y_2=0$ setzen, was darauf hinauskommt, dass die Fläche zwischen Kreisbogen und seiner Sehne gegeben ist. Heisst dann $x_2=b$ so ist

$$0=c_2-\frac{1}{a}\sqrt{1-c_1^2},\ 0=c_2-\frac{1}{a}\sqrt{1-(ab+c_1)^2},$$

$$A=bc_2-\frac{1}{2a^2}\Big[(ab+c_1)\sqrt{1-(ab+c_1)^2}-c_1\sqrt{1-c_1^2}$$
$$+arc(sin=ab+c_1)-arc(sin=c_1)\Big],$$

oder wegen der vorigen Gleichungen:

$$A=\tfrac{1}{2}bc_2-\frac{1}{2a^2}[arc(sin=ab+c_1)-arc(sin=c_1)]$$

Dann

$$1-c_1^2=1-(ab+c_1)^2,\ c_1^2=(ab+c_1)^2,\ 0=a^2b^2+2abc_1,$$

$$c_1=-\frac{ab}{2};\ ab+c_1=\frac{ab}{2};\ c_2=\frac{1}{a}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2b^2};$$

$$A=\frac{b}{2a}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2b^2}-\frac{1}{2a^2}\left[arc\left(sin=\frac{ab}{2}\right)+arc\left(sin=\frac{ab}{2}\right)\right],$$

$$A=\frac{b}{2a}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2b^2}-\frac{1}{a^2}arc\left(sin=\frac{ab}{2}\right)=\frac{1}{a^2}\left[\frac{ab}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2b^2}\right.$$
$$\left.-arc\left(sin=\frac{ab}{2}\right)\right];$$

$$y = c_2 - \frac{1}{a}\sqrt{1-(ax+c_1)^2} = \frac{1}{a}\left[\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2b^2} - \sqrt{1-(ax+c_1)^2}\right],$$

wo nun $y > 0$ sein muss. Ein M. M. in y tritt ein für $ax + c_1 = 0$, $x = \frac{1}{2}b$, und da nur ein Maximum stattfinden kann, so muss

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{[1-(ax+c_1)^2]^{3/2}} \text{ negativ, also } a < 0$$

sein. Daraus folgt, da c_2 und a dasselbe Zeichen haben, dass auch c_2 negativ ist, während c_1 positiv ausfällt. Setzt man also $-a$ für a, so ist

$$\left.\begin{aligned} ay &= \sqrt{1-\left(\frac{ab}{2}-ax\right)^2} - \sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2b^2},\ a > 0\ .\ . \\ &\text{und} \\ A &= \frac{1}{a^2}\left[arc\left(sin = \frac{ab}{2}\right) - \frac{ab}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2b^2}\right],\ a > \quad .\ . \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Da immer $x < b$, so ist $\left(\frac{ab}{2} - ax\right)^2 < \frac{1}{4}a^2b^2$, also fällt y positiv aus. Der Halbmesser des Kreises ist $\frac{1}{a}$, so dass, da ein Halbkreis nicht erreicht sein soll, $\frac{2}{a} > b$, $\frac{ab}{2} < 1$ sein muss, wie *dies* auch aus der Formel, die a bestimmt, klar ist.

Zur Bestimmung von a selbst hat man, wenn $\frac{ab}{2} = \varrho$:

$$\frac{4A}{b^2} = \frac{1}{\varrho^2}\left[arc\,(sin = \varrho) - \varrho\sqrt{1-\varrho^2}\right],\ a = \frac{2\varrho}{b}\ .\ .\ .\ .\ \text{(d)}$$

Für $\varrho = 1$ wäre

$$\frac{4A}{b^2} = \frac{\pi}{2},\quad A = \frac{b^2\pi}{8}$$

ein Halbkreis mit dem Durchmesser b, was nicht mehr als zulässig erkannt ist.

Aus unseren Entwickelungen folgt, dass von allen Kurven, die zwischen sich und ihrer Sehne denselben Flächeninhalt haben, der Kreisbogen die kürzeste ist.

2. Grösste Fläche bei gegebener Bogenlänge.

III. Von allen Kurven, die durch zwei feste Punkte gehen, und innerhalb derselben die gleiche Bogenlänge besitzen, die zu finden,

welche zwischen sich und der durch die zwei Punkte gehenden Sehne die grösste Fläche einschliesst.

Hier ist

$$f = y,\ F = \sqrt{1 + y'^2},$$

$$1 - a\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0,\quad \frac{a y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + c_1,$$

$$y'^2 = \frac{(x + c_1)^2}{a^2 - (x + c_1)^2},\ y' = \pm\frac{x + c_1}{\sqrt{a^2 - (x + c_1)^2}},\ y = c_2 \mp \sqrt{a^2 - (x + c_1)^2},$$

$$(y - c_2)^2 + (x + c_1)^2 = a^2.$$

Die Kurve ist also abermals ein Kreis. Dabei ist $y > 0$ vorausgesetzt.

Da hier wieder die untere Grenze von x Null angenommen werden kann, so ist, wenn die obere b ist, und man die Sehne zur Abszissenaxe nimmt:

$$0 = c_2 \mp \sqrt{a^2 - c_1^2},\ 0 = c_2 \mp \sqrt{a^2 - (b + c_1)^2},\ \text{also}$$

$$a^2 - c_1^2 = a^2 - (b + c_1)^2,\ 0 = b^2 + 2bc_1,\ c_1 = -\tfrac{1}{2}b;$$

$$c_2 = \pm\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2};$$

$$\int_0^b \left[c_2 \mp \sqrt{a^2 - (x - \tfrac{1}{2}b)^2}\right] dx = A,$$

$$\pm\int_0^b \left[\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2} - \sqrt{a^2 - (x - \tfrac{1}{2}b)^2}\right] = A.$$

Nun ist $x < b$, also $x - \frac{1}{2}b$ zwischen $-\frac{1}{2}b$ und $+\frac{1}{2}b$, d. h. $(x - \frac{1}{2}b)^2 < \frac{1}{4}b^2$, $a^2 - (x - \frac{1}{2}b)^2 > a^2 - \frac{1}{4}b^2$, so dass von den beiden Zeichen das untere gilt, mithin

$$y = \sqrt{a^2 - (x - \tfrac{1}{2}b)^2} - \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2},$$

$$\int_0^b \left[\sqrt{a^2 - (x - \tfrac{1}{2}b)^2} - \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2}\right] dx = A.$$

Um zu entscheiden, ob M. M., hat man

$$\frac{\partial^2 (f + aF)}{\partial y'^2} = \frac{a}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Da nun

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{a}(x + c_1),\ y' = -\frac{x + c_1}{\sqrt{a^2 - (x + c_1)^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - (x + c_1)^2}}{a},$$

so hat nothwendig a das negative Vorzeichen, so dass ein Maximum vorhanden ist *).

3. Kurve, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

IV. Ein biegsamer, nicht ausdehnbarer, sonst aber gleichartiger Faden von der Länge L soll in einer Vertikalebene so gelegt werden, dass sein Schwerpunkt so tief als möglich fällt.

Die x-Axe sei horizontal (wie in §. 7, IV.); p das Gewicht der Längeneinheit des Fadens. Dann ist die Ordinate des Schwerpunktes

$$\frac{1}{pL}\int_{x_1}^{x_2} py\sqrt{1+y'^2}\,dx, \text{ während } L = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Also

$$f = y\sqrt{1+y'^2},\ F = \sqrt{1+y'^2},$$

und also (wenn wir c statt des oben angewandten a schreiben) nach §. 3, VII.:

$$y\sqrt{1+y'^2} + c\sqrt{1+y'^2} - y'\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} + c\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = c_1,$$

d. h.

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1,\ y + c = c_1\sqrt{1+y'^2}.$$

Daraus folgt:

$$(y+c)^2 = c_1^2(1+y'^2),\quad y'^2 = \frac{1}{c_1^2}(y+c)^2 - 1,$$

$$c_1 y' = \pm\sqrt{(y+c)^2 - c_1^2},$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{(y+c)^2 - c_1^2}} = \pm\frac{dx}{dy},\ \pm(x+c_2) = c_1 l\left(y + c + \sqrt{(y+c)^2 - c_1^2}\right),$$

also wie in §. 5, II.:

$$y + c = \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

wo h, k die beiden Integrationskonstanten sind (Kettenlinie).

---

*) Natürlich muss $A < \frac{b^2\pi}{8}$ sein, wenn wir die besondere Form der Aufgabe beibehalten. Dieselbe ist aber nur ein einzelner Fall und müsste allgemeiner, wie die erste Aufgabe, gefasst sein, wo dann A andere Werthe haben kann. Doch werden selbst dann diese Werthe nur innerhalb einer bestimmten Schranke liegen können.

Dabei ist dann

$$y' = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}} - e^{-\frac{x-k}{h}}\right), \quad 1 + y'^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right)^2,$$

also

$$L = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right)dx = \tfrac{1}{2}h\left[e^{\frac{x_2-k}{h}} - e^{-\frac{x_2-k}{h}} - \left(e^{\frac{x_1-k}{h}} - e^{-\frac{x_1-k}{h}}\right)\right].$$

Zur Entscheidung, ob M. M., hat man

$$\frac{\partial^2(f + cF)}{\partial y'^2} = \frac{y + c}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

und da $y + c$ von demselben Zeichen wie h, so hat man ein Maximum, wenn $h < 0$. Darüber haben wir jedoch noch keine Untersuchung angestellt, so dass wir die eben berührte Entscheidung noch aussetzen *).

V. Seien die Endpunkte fest, wo also $x_1 = a$, $x_2 = b$, und η, ζ die frühere Bedeutung haben, so ist

$$\eta + c = \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{a-k}{h}} + e^{-\frac{a-k}{h}}\right), \quad \zeta + c = \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{b-k}{h}} + e^{-\frac{b-k}{h}}\right),$$

$$L = \tfrac{1}{2}h\left[e^{\frac{b-k}{h}} - e^{-\frac{b-k}{h}} - \left(e^{\frac{a-k}{h}} - e^{-\frac{a-k}{h}}\right)\right],$$

wo wir a, b positiv, $b > a$, voraussetzen, und eben so η, ζ positiv nehmen. Aus diesen Gleichungen sind c, h, k zu bestimmen

Aus der (e) folgt:

$$y' = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}} - e^{-\frac{x-k}{h}}\right), \quad y'' = \frac{1}{2h}\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right),$$

so dass y ein M. M. erreicht für $x = k$, wo dann $y'' = \frac{1}{h}$. Da aber hier der Natur der Sache nach nur ein Maximum in y stattfinden wird, so ist also $h < 0$. Daraus folgt dann von selbst, dass auch c negativ sein muss.

Setzen wir also $-h$, $-c$ für h, c, so ist

---

*) Dabei aber müssen wir nochmals darauf aufmerksam machen, dass bei dieser Entscheidung die Grössen $a_1, \ldots, a_n$ in §. 8 nicht als von den Integrationskonstanten c_1, c_2 (und etwa x_1, x_2) abhängig anzusehen sind, da nach §. 8, II. die dortigen Grössen (e') nur unveränderliche Werthe haben müsten, also $a_1, \ldots, a_n$ ganz beliebig bleiben. Endgiltig sind diese Grössen allerdings wie dort angegeben zu bestimmen.

$$y = c - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right);\ \eta = c - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{a-k}{h}} + e^{-\frac{a-k}{h}}\right),$$

$$\zeta = c - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{b-k}{h}} + e^{-\frac{b-k}{h}}\right),$$

$$L = \tfrac{1}{2}h\left[e^{\frac{b-k}{h}} - e^{-\frac{b-k}{h}} - \left(e^{\frac{a-k}{h}} - e^{-\frac{a-k}{h}}\right)\right] \quad . \quad . \quad (f)$$

Setzen wir hier $a - k = -\lambda$, also $k = a + \lambda$, $b - k = b - a - \lambda = \xi - \lambda$, wo $\xi = b - a$, so ist

$$\eta = c - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{\lambda}{h}} + e^{-\frac{\lambda}{h}}\right),\quad \zeta = c - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{\xi-\lambda}{h}} + e^{-\frac{\xi-\lambda}{h}}\right),$$

$$L = \tfrac{1}{2}h\left[e^{\frac{\xi-\lambda}{h}} - e^{-\frac{\xi-\lambda}{h}} + e^{\frac{\lambda}{h}} - e^{-\frac{\lambda}{h}}\right],$$

woraus

$$\zeta - \eta = \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{\lambda}{h}} + e^{-\frac{\lambda}{h}}\right) - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{\xi-\lambda}{h}} + e^{-\frac{\xi-\lambda}{h}}\right).$$

Daraus nun (λ, h sind zu bestimmen)

$$\begin{aligned} L^2 - (\zeta-\eta)^2 = \tfrac{1}{4}h^2\Big[&\left(e^{\frac{\xi-\lambda}{h}} - e^{-\frac{\xi-\lambda}{h}}\right)^2 + \left(e^{\frac{\lambda}{h}} - e^{-\frac{\lambda}{h}}\right)^2 \\ &+ 2\left(e^{\frac{\xi-\lambda}{h}} - e^{-\frac{\xi-\lambda}{h}}\right)\left(e^{\frac{\lambda}{h}} - e^{-\frac{\lambda}{h}}\right) - \left(e^{\frac{\lambda}{h}} + e^{-\frac{\lambda}{h}}\right)^2 \\ &- \left(e^{\frac{\xi-\lambda}{h}} + e^{-\frac{\xi-\lambda}{h}}\right)^2 + 2\left(e^{\frac{\lambda}{h}} + e^{-\frac{\lambda}{h}}\right)\left(e^{\frac{\xi-\lambda}{h}} + e^{-\frac{\xi-\lambda}{h}}\right)\Big] \\ = \tfrac{1}{4}h^2&\left[-8 + 4e^{\frac{\xi}{h}} + 4e^{-\frac{\xi}{h}}\right] = h^2\left(e^{\frac{\xi}{h}} + e^{-\frac{\xi}{h}} - 2\right). \end{aligned}$$

Setzt man also

$$\frac{\xi}{2h} = \mu,\quad h = \frac{\xi}{2\mu}\,(\mu > 0),$$

so ist

$$4\,\frac{L^2 - (\zeta-\eta)^2}{\xi^2} = \frac{1}{\mu^2}(e^{2\mu} + e^{-2\mu} - 2) = \frac{1}{\mu^2}(e^{\mu} - e^{-\mu})^2,$$

und somit

$$\frac{1}{\mu}(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 2\sqrt{\frac{L^2 - (\zeta-\eta)^2}{\xi^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

eine Gleichung, die bei positivem μ nur einen Werth liefert *). Damit ist natürlich h bestimmt. Dann

---

*) Es lässt sich zeigen, dass

$$\frac{e^{\mu} - e^{-\mu}}{\mu}$$

von $\mu = 0$ an (wo diese Grösse $= 2$ ist) unbedingt wächst. Der Differentialquotient dieser Grösse ist nämlich

$$\zeta - \eta = \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{\xi}{2h}} - e^{-\frac{\xi}{2h}}\right)\left(e^{\frac{2\lambda-\xi}{2h}} - e^{-\frac{2\lambda-\xi}{2h}}\right),$$

so dass

$$e^{\frac{2\lambda-\xi}{2h}} - e^{-\frac{2\lambda-\xi}{2h}} = \frac{2(\zeta-\eta)}{h\left(e^{\frac{\xi}{2h}} - e^{-\frac{\xi}{2h}}\right)} = \frac{4\mu(\zeta-\eta)}{\xi(e^{\mu}-e^{-\mu})}, \quad (g')$$

woraus abermals ein einziger Werth von $\frac{2\lambda - \xi}{2h}$ folgt, der positiv ist, wenn $\zeta - \eta > 0$, negativ, wenn $\zeta - \eta < 0$. Damit ist dann $\lambda = k - a$, also k bestimmt. Endlich

$$c = \eta + \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{\lambda}{h}} + e^{-\frac{\lambda}{h}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g'')$$

Für den besondern Fall, dass $\zeta = \eta$, ist $2\lambda - \xi = 0$, $\lambda = \tfrac{1}{2}\xi$, $k = \tfrac{1}{2}(a+b)$.

VI. Hinsichtlich der Entscheidung, ob M. M., hat man jetzt

$$\frac{\partial^2(f - cF)}{\partial y'^2} = \frac{y - c}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

und da $y - c < 0$, so kann ein Maximum vorhanden sein.

Weiter ist (§. 5, V.)

$$\frac{\partial y}{\partial h} + m\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{y-c}{h} - \frac{x-k}{h}y' - my',$$

$$- \frac{e^{\mu} - e^{-\mu}}{\mu^2} + \frac{e^{\mu} + e^{-\mu}}{\mu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

und etwa für $\mu = 1$ positiv. Kann er also nie Null werden (ausser bei $\mu = 0$), so ist er nothwendig immer positiv. Sollte derselbe aber Null sein ($\mu = 0$ ausgeschlossen), so wäre

$$e^{\mu}(\mu - 1) + e^{-\mu}(\mu + 1) = 0, \qquad e^{2\mu} = \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

Da $e^{2\mu}$ immer positiv, so müsste $\mu < 1$ sein. Von $\mu = 0$ an bis $\mu = 1$ ist aber die zweite Seite immer grösser als die erste. Denn es ist ($\mu < 1$)

$$l\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) = l(1+\mu) - l(1-\mu) = 2\mu + \tfrac{2}{3}\mu^3 + \ldots,$$

$$\text{d. h. } l\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) > 2\mu,$$

woraus sofort

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} > e^{2\mu}$$

folgt. Demnach ist (α) immer positiv und die erste Seite in (g) wächst fortwährend mit μ. Daraus folgt von selbst, dass die Gleichung (g) nur einen (positiven) Werth liefert.

welche Grösse Null wird, wenn

$$m = \left(\frac{y-c}{h} - \frac{x-k}{h} y'\right)\frac{1}{y'}, \quad hm - k = \frac{y-c}{y'} - x.$$

Nimmt nun $\frac{y-c}{y'} - x$ nicht alle möglichen Werthe (von $-\infty$ bis $+\infty$) an, so giebt es immer Werthe von m, für welche obige Grösse nicht Null wird.

Zieht man wieder in dem Punkte (x, y) eine Tangente, so trifft dieselbe die Gerade, deren Gleichung $y = c$ ist, in dem Punkte, dessen Abszisse $x - \frac{y-c}{y'}$ ist. Da nun im tiefsten Punkte (der Kettenlinie) $y' = 0$ und sein Zeichen wechselt, so folgt (wie in §. 5, V.), dass die Tangenten an den beiden Aufhängepunkten sich in einer Entfernung von der Abszissenaxe schneiden müssen, die kleiner als c ist. Dann hat man ein Maximum.

VII. Seien nun zwei Grenzkurven gegeben:

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

so müssen x_1, x_2, h, k so bestimmt werden, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(y\sqrt{1+y'^2} - c\sqrt{1+y'^2}\right) dx$$

ein Maximum, wenn

$$y = c - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right), \quad \varphi(x_1, \eta) = 0, \quad \psi(x_2, \zeta) = 0,$$

wobei (vergl. Note zu IV.) c als absolut konstant (d. h. unabhängig von x_1, x_2 h, k) anzusehen ist. Dazu ist

$$\eta = c - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{x_1-k}{h}} + e^{-\frac{x_1-k}{h}}\right), \quad \zeta = c - \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{x_2-k}{h}} + e^{-\frac{x_2-k}{h}}\right).$$

Man wird also nun

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[y\sqrt{1+y'^2} - c\sqrt{1+y'^2}\right] dx + g_1\,\varphi(x_1, \eta) + g_2\,\psi(x_2, \zeta)$$

nach x_1, x_2, h, k differenziren und die Differentialquotienten Null setzen, wodurch nebst den obigen zwei Bedingungsgleichungen die nöthigen Gleichungen gefunden sind. Setzen wir z. A.

$$y\sqrt{1+y'^2} - c\sqrt{1+y'^2} = \Phi,$$

so hat man

$$\mathop{\overline{\underline{Z}}}_{}^{x=x_2}\Phi + g_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\right) = 0,$$

$$-\mathop{\overline{\underline{Z}}}_{}^{x=x_1}\Phi + g_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\right) = 0,$$

$$\mathop{\overline{\underline{Z}}}_{x=x_1}^{x=x_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial h}\right) + g_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial h} + g_2\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial h} = 0\ (\S.7,\text{VIII.}),$$

$$\mathop{\overline{\underline{Z}}}_{x=x_1}^{x=x_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial k}\right) + g_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial k} + g_2\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial k} = 0.$$

Die zwei letzten Gleichungen heissen auch, wenn wir statt des Substitutionszeichens Zeiger anhängen:

$$\left[g_2\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_2\right]\frac{\partial\zeta}{\partial h} + \left[g_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_1\right]\frac{\partial\eta}{\partial h} = 0,$$

$$\left[g_2\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_2\right]\frac{\partial\zeta}{\partial k} + \left[g_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_1\right]\frac{\partial\eta}{\partial k} = 0,$$

und geben sofort (vergl. XIV.):

$$g_2\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_2 = 0, \quad g_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_1 = 0.$$

Dadurch werden die zwei ersten:

$$g_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -\left(\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2, \quad g_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \left(\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1,$$

d. h. wenn man beachtet, dass

$$\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial y'}y' = \frac{y-c}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y'} = \frac{y'(y-c)}{\sqrt{1+y'^2}}:$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = (y')_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = (y')_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},$$

welche Gleichungen aussagen, dass die Kettenlinie auf den Grenzkurven senkrecht steht. Zur wirklichen Berechnung hat man übrigens die obigen vier Gleichungen, nebst

$$\varphi(x_1, \eta) = 0, \quad \psi(x_2, \zeta) = 0.$$

Sind x_1, x_2, h, k (nebst g_1, g_2) aus den obigen sechs Gleichungen bestimmt, so ist noch

$$L = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

zu benutzen, um endlich c zu bestimmen; oder besser, man wird sofort diese Gleichungen mit den vorigen verbinden. Dazu kann man aber auch die folgenden fünf Gleichungen benutzen:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad \varphi(x_1, \eta) = 0, \quad \psi(x_2, \zeta) = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1},$$

die sich aus den früheren ergeben. Damit ist die Aufgabe erledigt *).

4. Kurve von gegebener Länge, welche die kleinste oder grösste Rotationsfläche erzeugt.

VIII. Unter allen ebenen Kurven, deren Länge L ist, soll diejenige gefunden werden, welche bei der Rotation um die x-Axe die grösste oder kleinste Rotationsfläche erzeugt.

Hier ist

$$f = y\sqrt{1 + y'^2}, \quad F = \sqrt{1 + y'^2};$$

man hat folglich dieselbe Aufgabe, wie in IV., vor sich, aus der also folgt

$$y + c = \tfrac{1}{2}h\left(e^{\frac{x-k}{h}} + e^{-\frac{x-k}{h}}\right),$$

d. h. abermals die Kettenlinie. Da hier wieder das Zeichen von $y + c$ über M. M. entscheidet, man aber hinsichtlich des Zeichens von h jetzt nicht kurzweg entscheiden kann, da zwei Kettenlinien von derselben Länge zwischen zwei festen Punkten im Allgemeinen denkbar sind, von denen die eine ihre hohle, die andere die erhabene Seite gegen die Rotationsaxe wendet, so wird die Aufgabe ein Maximum liefern, wenn h negativ (wie im 3. Beispiel), ein Minimum, wenn h positiv. Dabei muss jedoch im letzteren Falle die Einschränkung gemacht werden, dass die Kettenlinie die Rotationsaxe nicht schneide.

---

*) Hinsichtlich der letzten Entscheidung, ob M. M., wird man, wie in der Note zu §. 7, VII. angegeben, verfahren, wo die Grösse $\int_{x_1}^{x_2} (f - cF)\, dx$ zu betrachten ist, und zwar (c absolut konstant) als Funktion etwa von x_1, x_2, wobei h, k von diesen Grössen mittelst $\varphi = 0$, $\psi = 0$ abhängen.

5. Rotationskörper von grösster Anziehung.

IX. Man soll die Form finden, welche ein homogener Rotationskörper von gegebenem Inhalte annehmen muss, damit die Anziehung auf einen Punkt A seiner eigenen Masse in der Richtung seiner Axe am grössten sei.

Sei A der Koordinatenanfang (für Raum-Polarcoordinaten), M ein Punkt des Körpers in einem Meridianschnitt (dessen Gestalt eigentlich gesucht ist); r, φ seien die Polarkoordinaten desselben, nämlich r der Abstand von A, φ der Winkel mit der Polaraxe. Wir ziehen einen zweiten unendlich nahen Meridianschnitt, der mit ersterem den Winkel $d\psi$ mache; errichten über dem unendlich kleinen Rechtecke $r\,d\varphi\,dr$ ein Prisma von der Höhe $r \sin\varphi\,d\psi$, das also zwischen beiden Schnitten liegt und als Körperelement angesehen werden darf. Sein Inhalt ist $r^2 \sin\varphi\,d\varphi\,d\psi\,dr$, und wenn das gewöhnliche Anziehungsgesetz angenommen wird, die Anziehung $k \sin\varphi\,d\varphi\,d\psi\,dr$, deren Projection auf die Axe $k \sin\varphi \cos\varphi\,d\varphi\,d\psi\,dr$ ist.

Ist R, eine Funktion von φ, der Fahrstrahl der Kurve des Meridianschnittes, so ist die Gesammtanziehung nach der Polaraxe:

$$k\int_0^{2\pi} \psi \int_0^{\pi} \sin\varphi \cos\varphi\,\partial\varphi \int_0^{R} \partial r = 2\pi k \int_0^{\pi} R \sin\varphi \cos\varphi\,d\varphi,$$

während das Volumen:

$$\int_0^{2\pi} \partial\psi \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\partial\varphi \int_0^{R} r^2\,\partial r = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} R^3 \sin\varphi\,d\varphi$$

ist. Demnach jetzt ($y = R$, $x = \varphi$)

$$f = R \sin\varphi \cos\varphi, \quad F = R^3 \sin\varphi,$$

wo nun der Fall des §. 4, VIII. eingetreten und die Aufgabe offenbar lösbar ist. Man hat also

$$\sin\varphi \cos\varphi + c R^2 \sin\varphi = 0, \quad R^2 = -\frac{1}{c}\cos\varphi,$$

während, wenn A das gegebene Volumen:

$$A = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} \sin\varphi \left(-\frac{\cos\varphi}{c}\right)^{\frac{3}{2}} d\varphi,$$

aus welcher Formel sofort hervorgeht, dass φ nur von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ (bei negativem c) oder $\frac{1}{2}\pi$ bis π (bei positivem c) gehen darf.

Jetzt ist

$$\frac{\partial^2(f + \frac{1}{3}cF)}{\partial R^2} = 2cR\sin\varphi,$$

welche Grösse positiv ist, wenn c es ist, negativ, wenn c negativ. Nehmen wir den letzteren Fall *), so haben wir ein Maximum, und wenn $c = -\frac{1}{a^2}$:

$$R^2 = a^2\cos\varphi, \quad \varphi \text{ von } 0 \text{ bis } \tfrac{1}{2}\pi;$$

$$A = \frac{2\pi}{3}a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{\frac{3}{2}}\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{4}{15}a^3\pi.$$

6. Geschlossene Kurve von grösster Fläche.

X. Es soll eine geschlossene ebene Kurve von der Länge L gesucht werden, welche die möglich grösste Fläche umschliesst.

Wählen wir zur Bestimmung der Kurve die gewöhnlichen Polarkoordinaten r und φ, den Pol im Innern der Kurve, und setzen voraus, dass φ und der Kurvenbogen durchweg wachsen, was wir wohl dürfen, so ist

$$\text{die Fläche} = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi, \quad \text{die Kurve} = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi,$$

also $(y = r,\ x = \varphi)$

$$f = r^2, \quad F = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$$

und (§. 3, VII.)

$$r^2 + a\sqrt{r^2 + r'^2} - \frac{ar'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = c_1, \quad r^2 + \frac{ar^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = c_1,$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{ar^2}{c_1 - r^2}, \quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{a^2r^4}{(c_1 - r^2)^2} - r^2;$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r\sqrt{\frac{a^2r^2}{(c_1 - r^2)^2} - 1} = \pm\frac{r}{c_1 - r^2}\sqrt{a^2r^2 - (c_1 - r^2)^2}.$$

Was das Doppelzeichen betrifft, so gilt das eine so lange, als

*) Der andere giebt insofern ein Minimum, als dasselbe dem Maximum gleich, aber entgegen gesetzt gerichtet ist.

$\frac{dr}{d\varphi}$ nicht Null oder ∞ wird; letzteres findet für $r^2 = c_1$, ersteres für

$$a^2r^2 = (c_1 - r^2)^2, \quad \pm ar = c_1 - r^2, \quad r = \mp \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{c_1 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

statt, wo übrigens die Zeichen sich nicht entsprechen, so dass in Wahrheit vier Werthe erscheinen. Nun ist aber, wie aus den obigen Gleichungen hervorgeht, nothwendig a von demselben Zeichen wie $c_1 - r^2$, also hat man vorhin

$$ar = c_1 - r^2, \quad r = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{c_1 - \tfrac{1}{4}a^2},$$

was nur noch zwei Werthe liefert. Daraus folgt aber auch, dass $c_1 > \frac{1}{4}a^2$ sein muss, wenn überhaupt ein Zeichenwechsel stattfinden soll. Wäre a positiv (was jedoch nicht der Fall sein wird), so könnte auch nur das obere Zeichen gelten. Vorläufig werden wir in der Differentialgleichung beide Zeichen gelten lassen müssen. Dann ist

$$\pm \int \frac{c_1 - r^2}{r} \frac{dr}{\sqrt{a^2r^2 - (c_1 - r^2)^2}} = \varphi + c_2,$$

$$\pm \tfrac{1}{2} arc\left(sin = \frac{2(c_1 + r^2)}{r^2(a^2 + 4c_1)} \sqrt{a^2r^2 - (c_1 - r^2)^2}\right) = \varphi + c_2,$$

$$\frac{2(c_1 + r^2)}{r^2(a^2 + 4c_1)} \sqrt{a^2r^2 - (c_1 - r^2)^2} = \pm \sin(2\varphi + 2c_2).$$

d. h.

$$\frac{c_1 + r^2}{r^2} \sqrt{(a^2 + 4c_1)r^2 - (c_1 + r^2)^2} = \pm \tfrac{1}{2}(a^2 + 4c_1) \sin(2\varphi + 2c_2).$$

Hier ist entschieden $a^2 + 4c_1 > 0$ anzunehmen. Hieraus folgt

$$\frac{(c_1 + r^2)^2}{r^2}\left[a^2 + 4c_1 - \frac{(c_1 + r^2)^2}{r^2}\right] = \tfrac{1}{4}(a^2 + 4c_1)^2 \sin^2(2\varphi + 2c_2),$$

$$\left(\frac{c_1 + r^2}{r}\right)^4 - (a^2 + 4c_1)\left(\frac{c_1 + r^2}{r}\right)^2 = -\tfrac{1}{4}(a^2 + 4c_1)^2 \sin^2(2\varphi + 2c_2),$$

$$\left(\frac{c_1 + r^2}{r}\right)^2 = \frac{a^2 + 4c_1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2 + 4c_1)^2 - \tfrac{1}{4}(a^2 + 4c_1)^2 \sin^2(2\varphi + 2c_2)},$$

d. h.

$$\left(\frac{c_1 + r^2}{r}\right)^2 = \frac{a^2 + 4c_1}{2}[1 \pm \cos(2\varphi + 2c_2)],$$

so dass

$$\left(\frac{c_1 + r^2}{r}\right)^2 = (a^2 + 4c_1) \cos^2(\varphi + c_2) \text{ oder}$$

$$\left(\frac{c_1 + r^2}{r}\right)^2 = (a^2 + 4c_1) \sin^2(\varphi + c_2).$$

Hieraus

$$\frac{c_1 + r^2}{r} = \pm \sqrt{a^2 + 4c_1} \cos(\varphi + c_2), \text{ oder}$$

$$\frac{c_1 + r^2}{r} = \pm \sqrt{a^2 + 4c_1} \sin(\varphi + c_2).$$

Lässt man aber φ von 0 bis 2π gehen, so durchlaufen die zweiten Seiten thatsächlich dieselben Werthe, so dass es genügt

$$\frac{c_1 + r_2}{r} = \pm \sqrt{a^2 + 4c_1} \cos(\varphi + c_2)$$

zu setzen. Aber auch hier wird das eine Zeichen völlig genügen, indem thatsächlich abermals dasselbe herauskommt, ob eines oder das andere gilt, so dass

$$c_1 + r^2 = r\sqrt{a^2 + 4c_1} \cos(\varphi + c_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

die Gleichung der gesuchten Kurve ist. Da diese Gleichung *auch* heisst

$$\left(r\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4c_1} \cos c_2\right)^2 + \left(r\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sqrt{a^2 + 4c_1} \sin c_2\right)^2 = \tfrac{1}{4}a^2,$$

oder in rechtwinkeligen Koordinaten:

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4c_1} \cos c_2\right)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4c_1} \sin c_2\right)^2 = \tfrac{1}{4}a^2,$$

so ist die Kurve ein Kreis vom Halbmesser $\sqrt{\frac{1}{4}a^2}$. Da der Umfang desselben $= \pi\sqrt{a^2}$ gleich L sein soll, so ist damit $\sqrt{a^2}$, d. h. der Halbmesser bestimmt.

Da keine weitere Bedingung vorhanden ist, als dass für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ die Grösse r denselben Werth haben muss, weil die Kurve eine geschlossene sein soll; dies aber aus (h) offenbar folgt, so bleiben c_1, c_2 ganz willkürlich, wie dies auch in der Natur der Sache liegt, da der Halbmesser den Kreis hier vollständig bestimmt. Hinsichtlich der Entscheidung ist

$$\frac{\partial^2 (f + aF)}{\partial r'^2} = \frac{ar^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

Da in unserem Resultate (h) der Mittelpunkt nicht im Koordinatenanfang ist, so wird $\frac{dr}{d\varphi}$ zweimal das Zeichen wechseln, so dass es zwei Werthe von r giebt, für die $ar = c_1 - r^2$, was nur ange-

nommen werden kann, wenn $a < 0$. Folglich ist hier ein Maximum wirklich vorhanden [$r^2 = c_1$ setzen hiesse $\frac{a r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = 0$ annehmen, was offenbar hier unzulässig ist].

Eine weitere Untersuchung erscheint überflüssig, da die Aufgabe, wie sie gestellt ist, ganz offenbar einer Auflösung fähig ist.

7. Geschlossene Kurve von kleinster Länge.

XI. Man soll eine geschlossene ebene Kurve suchen, welche eine gegebene Fläche einschliesst, und den möglich kleinsten Umfang hat.

Wählen wir dieselben Koordinaten, wie im vorigen Beispiele, so ist

$$f = \sqrt{r^2 + r'^2},\ F = r^2.$$

Daraus ergiebt sich aber offenbar wieder ein Kreis. Da hier

$$\frac{\partial^2 (f + aF)}{\partial r^2} = \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}},$$

so hat man entschieden ein Minimum, und es bedarf bei der offenbaren Zulässigkeit der Aufgabe keiner weiteren Untersuchung mehr.

8. Kurve auf einer Kugel, die mit einer andern die grösste Fläche einschliesst.

XII. Auf einer Kugel vom Halbmesser r ist eine bestimmte Kurve gegeben; man soll eine andere von der Länge L so bestimmen, dass sie mit jener (auf der Kugel) die grösste Fläche einschliesst.

Wir wählen den Mittelpunkt zum Koordinatenanfang und die gewöhnlichen Polarkoordinaten r, φ, ψ, wobei wir die xy-Ebene die des Aequators; die xz-Ebene die des Anfangs-Meridians; den Punkt, in dem die (positive) z-Axe die Kugel trifft, den (positiven) Pol; eine Ebene durch die z-Axe eine Meridianebene; und den Schnitt der Kugel und dieser Ebene einen Meridian nennen wollen (der eigentlich als Halbkreis aufzufassen ist).

Den Winkel φ zählen wir von 0 bis 2π im Sinn: positive x-

Axe gegen positive y-Axe und heissen ihn die (geographische) Länge; ψ wird von $-\frac{1}{2}\pi$ zu $+\frac{1}{2}\pi$ gezählt und heisst die Breite. Dieselben sollen durch λ, β bezeichnet sein. Dann ist

$$x = r\cos\beta\cos\lambda,\ y = r\cos\beta\sin\lambda,\ z = r\sin\beta.$$

Eine Gleichung zwischen β und λ stellt nun eine auf der Kugel liegende Kurve vor. Die Fläche eines Kugelstücks wird durch das doppelte Integral

$$r^2\int\int\cos\beta\,\partial\beta\,\partial\lambda$$

ausgedrückt. Das Flächenstück zwischen der gegebenen Kurve und der gesuchten ist gleich dem Unterschiede zweier Flächen, die enthalten sind zwischen:

Aequator, der gegebenen Kurve und den Meridianen ihrer Endpunkte und

Aequator, der gesuchten Kurve und denselben Meridianen,

indem wir gegebene und gesuchte Kurve in denselben Punkten enden lassen, und weitere Durchschnittspunkte beider Kurven nicht annehmen.

Da nun die erstgenannte Fläche eine bestimmte, *gegebene* Grösse ist, so folgt daraus, dass die zweite für sich ein Maximum sein muss (III).

Dieselbe ist aber, wenn wir β als Funktion von λ betrachten, und beachten, dass für den Aequator $\beta = 0$:

$$r^2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\partial\lambda\int_0^{\beta}\cos\beta\,\partial\beta = r^2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sin\beta\,d\lambda.$$

Die Länge der Kurve ist ebenso:

$$r\int_{\lambda_2}^{\lambda_2}\sqrt{\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)^2 + \cos^2\beta}\,d\lambda = L,$$

wo wir allerdings annehmen, dass in der ganzen Ausdehnung Kurve und λ zugleich wachsen, eine Voraussetzung, die sicher gestattet ist.

Man hat also ($y = \beta$, $x = \lambda$):

$$f = \sin\beta,\quad F = \sqrt{\beta'^2 + \cos^2\beta}.$$

also (§. 3, VII.)

$$\sin\beta + a\sqrt{\beta'^2 + \cos^2\beta} - \frac{a\beta'^2}{\sqrt{\beta'^2 + \cos^2\beta}} = c_1,$$

$$\sin\beta + \frac{a\cos^2\beta}{\sqrt{\beta'^2 + \cos^2\beta}} = c_1,$$

$$\beta'^2 = \frac{a^2\cos^4\beta - (c_1 - \sin\beta)^2\cos^2\beta}{(c_1 - \sin\beta)^2},$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \pm\frac{\sqrt{a^2\cos^4\beta - (c_1 - \sin\beta)^2\cos^2\beta}}{c_1 - \sin\beta},$$

$$\pm\int\frac{(c_1 - \sin\beta)\,d\beta}{\sqrt{a^2\cos^4\beta - (c_1 - \sin\beta)^2\cos^2\beta}} = \lambda + c_2,$$

welches die Gleichung der gesuchten Kurve ist. Um das vorkommende Integral zu bestimmen, beachten wir, dass

$$\frac{d}{d\beta}\,\frac{c_1\sin\beta - 1}{b\cos\beta} = \frac{c_1 - \sin\beta}{b\cos^2\beta},$$

also

$$\int\frac{(c_1 - \sin\beta)\,d\beta}{\sqrt{a^2\cos^4\beta - (c_1 - \sin\beta)^2\cos^2\beta}}$$

$$= \int\frac{(c_1 - \sin\beta)\,d\beta}{\cos\beta\sqrt{(a^2 - c_1^2 + 1)\cos^2\beta - (c_1\sin\beta - 1)^2}}$$

$$= \int\frac{c_1 - \sin\beta}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}\cos^2\beta}\,\frac{d\beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_1\sin\beta - 1}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}\cos\beta}\right)^2}}$$

$$= arc\left(\sin = \frac{c_1\sin\beta - 1}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}\cos\beta}\right),$$

so dass

$$\pm\, arc\left(\sin = \frac{c_1\sin\beta - 1}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}\cos\beta}\right) = \lambda + c_2,$$

$$\frac{c_1\sin\beta - 1}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}\cos\beta} = \pm\sin(\lambda + c_2),$$

$$c_1\sin\beta - 1 = \pm\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}\cos\beta(\sin\lambda + c_2) \quad . \quad . \quad \text{(h)}$$

Diese Gleichung hat die Form

$$A\cos\beta\cos\lambda + B\cos\beta\sin\lambda + C\sin\beta - 1 = 0,$$

d. h.

$$Ax + By + Cz - 1 = 0,$$

und ist mithin die einer Ebene. Die gesuchte Kurve ist folglich ein Kreis. Das Doppelzeichen in (h) hängt mit dem Zeichenwechsel von $\frac{d\beta}{d\lambda}$ zusammen.

Da

$$\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)^2 = \frac{a^2 \cos^4\beta - (c_1 - \sin\beta)^2 \cos^2\beta}{(c_1 - \sin\beta)^2},$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)^2 + \cos^2\beta = \frac{a^2 \cos^4\beta}{(c_1 - \sin\beta)^2};$$

ferner

$$a^2 \cos^2\beta - (c_1 - \sin\beta)^2 = (a^2 - c_1^2 + 1) \cos^2\beta - (c_1 \sin\beta - 1)^2$$
$$= (a^2 - c_1^2 + 1) \cos^2\beta \sin^2(\lambda + c_2),$$

$$(c_1 - \sin^2\beta)^2 = \cos^2\beta \, [a^2 - (a^2 - c_1^2 + 1) \sin^2(\lambda + c_2)],$$

so ist

$$\frac{a^2 \cos^4\beta}{(c_1 - \sin\beta)^2} = \frac{a^2 \cos^2\beta}{a^2 - (a^2 - c_1^2 + 1) \sin^2(\lambda + c_2)},$$

worin noch $\cos\beta$ aus (h) zu ersetzen ist.

Hier ist

$$\frac{\partial^2 (f + aF)}{\partial \beta'^2} = \frac{a \cos^2\beta}{[\cos^2\beta + \beta'^2]^{3/2}},$$

und man hat also ein Maximum, wenn $a < 0$. Da aber offenbar nur ein Maximum zulässig ist, so hat man also a als negativ anzusehen.

Da das Doppelzeichen in (h) mit dem in $\frac{d\beta}{d\lambda}$ zusammenhängt, so gilt das eine oder andere in den beiden Formeln in gleicher Weise. Ein Wechsel tritt ein, wenn

$$a^2 \cos^2\beta = (c_1 - \sin\beta)^2, \quad \text{d. h.} \ \sin^2(\lambda + c_2) = 0,$$

was aber die Formel (h) thatsächlich eintreten lässt, wenn man sie blos schreibt:

$$c_1 \sin\beta - 1 = \sqrt{a^2 - c_1^2 + 1} \cos\beta \sin(\lambda + c_2) \quad . \quad . \quad (h')$$

welche Gleichung die (h) ersetzt.

Daraus nun

$$in\beta + c_1 \cos\beta \frac{\partial \beta}{\partial c_1} = -\frac{c_1}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}} \cos\beta \sin(\lambda + c_2)$$

$$- \sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}\, \sin\beta \frac{\partial \beta}{\partial c_1} \sin(\lambda + c_2),$$

$$c_1 \cos\beta \frac{\partial \beta}{\partial c_2} = \sqrt{a^2 - c_1^2 + 1} \cos\beta \cos(\lambda + c_2)$$

$$- \sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}\, \sin\beta \frac{\partial \beta}{\partial c_2} \sin(\lambda + c_2),$$

$$\frac{\frac{\partial \beta}{\partial c_1}}{\frac{\partial \beta}{\partial c_2}} = \frac{\frac{-c_1}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1}} \cos\beta \sin(\lambda + c_2) - \sin\beta}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1} \cos\beta \cos(\lambda + c_2)}$$

$$= \frac{-c_1}{a^2 - c_1^2 + 1} tg(\lambda + c_2) - \frac{tg\beta}{\sqrt{a^2 - c_1^2 + 1} \cos(\lambda + c_2)},$$

welche Grösse innerhalb der Grenzen der Integration nicht alle möglichen Werthe durchlaufen wird, so dass immer noch ein Werth von m möglich ist, für den nicht

$$\frac{\partial \beta}{\partial c_1} + m \frac{\partial \beta}{\partial c_2} = 0.$$

XIII. Wir übergehen den Fall fester Endpunkte, um nur den zu betrachten, da beide Endpunkte der gesuchten Kurve in derselben gegebenen Kurve liegen, wie dies die eigentliche Fassung der Aufgabe meint. Die Gleichung dieser Kurve sei

$$\beta = \varphi(\lambda) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(i)}$$

Dann hat man c_1, c_2, λ_1, λ_2 dadurch zu bestimmen, dass man

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [f + aF]\, d\lambda + k_1[\beta_1 - \varphi(\lambda_1)] + k_2[\beta_2 - \varphi(\lambda_2)]$$

nach den genannten vier Grössen differenzirt u. s. w. Dabei ist

$$f + aF = \sin\beta + a\sqrt{\cos^2\beta + \left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)^2}.$$

Daraus ergiebt sich (§. 7, VIII.):

$$\overset{\lambda=\lambda_2}{Z}\left[\sin\beta + a\sqrt{\cos^2\beta + \beta'^2}\right] + k_2\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial \lambda_2} - \varphi'(\lambda_2)\right] = 0,$$

$$-\overset{\lambda=\lambda_1}{Z}\left[\sin\beta + a\sqrt{\cos^2\beta + \beta'^2}\right] + k_1\left[\frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda_1} - \varphi'(\lambda_1)\right] = 0,$$

$$\sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2}\left[\frac{a\beta'}{\sqrt{\beta'^2+\cos^2\beta}}\frac{\partial\beta}{\partial c_1}\right]+k_1\frac{\partial\beta_1}{\partial c_1}+k_2\frac{\partial\beta_2}{\partial c_1}=0,$$

$$\sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2}\left[\frac{a\beta'}{\sqrt{\beta'^2+\cos^2\beta}}\frac{\partial\beta}{\partial c_2}\right]+k_1\frac{\partial\beta_1}{\partial c_2}+k_2\frac{\partial\beta_2}{\partial c_2}=0.$$

Bezeichnen wir z. A. $f+aF$ durch Φ, und durch angehängte Zeiger 1 und 2 die Werthe an den Grenzen, so ist

$$k_2\left[(\beta')_2-\varphi'(\lambda_2)\right]=-\Phi_2,\quad k_1\left[(\beta')_1-\varphi'(\lambda_1)\right]=\Phi_1;$$

$$k_1\frac{\partial\beta_1}{\partial c_1}+k_2\frac{\partial\beta_2}{\partial c_1}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}\right)_2\frac{\partial\beta_2}{\partial c_1}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}\right)_1\frac{\partial\beta_1}{\partial c_1},$$

$$k_1\frac{\partial\beta_1}{\partial c_2}+k_2\frac{\partial\beta_2}{\partial c_2}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}\right)_2\frac{\partial\beta_2}{\partial c_2}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}\right)_1\frac{\partial\beta_1}{\partial c_2},$$

woraus sofort

$$k_2=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}\right)_2,\quad k_1=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}\right)_1,$$

so dass

$$\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)_2-\varphi'(\lambda_2)=\left(\frac{\Phi}{\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}}\right)_2,\quad\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)_1-\varphi'(\lambda_1)=\left(\frac{\Phi}{\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}}\right)_1.$$

Hierbei ist*)

$$\frac{\Phi}{\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}}=\frac{\sin\beta+a\sqrt{\cos^2\beta+\beta'^2}}{a\beta'}\sqrt{\cos^2\beta+\beta'^2},$$

$$\frac{\Phi}{\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}}-\beta'=\frac{\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta+\beta'^2}+a(\cos^2\beta+\beta'^2)-a\beta'^2}{a\beta'}$$

$$=\frac{\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta+\beta'^2}+a\cos^2\beta}{a\beta'}=\frac{c_1\sqrt{\beta'^2+\cos^2\beta}}{a\beta'},$$

so dass an den beiden Grenzen

$$c_1\sqrt{\beta'^2+\cos^2\beta}+a\beta'\varphi'(\lambda)=0,\quad\left(c_1+\varphi'(\lambda)\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'}=0\right)$$

sein muss.

---

*) $c_1-\sin\beta$ kann nicht Null werden, da sonst $\frac{d\beta}{d\lambda}=\infty$ würde, was wir ausschliessen müssen; demnach hat diese Grösse immer dasselbe Zeichen. Dasselbe fällt, wie die erste unserer Gleichungen in XII. besagt, zusammen mit dem von a, ist also negativ.

Sollten die beiden Kurven auf einander etwa senkrecht stehen, so müsste

$$\cos^2\beta + \beta'\varphi'(\lambda) = 0$$

sein, wozu gehörte, dass

$$c_1\sqrt{\beta'^2 + \cos^2\beta} = a\cos^2\beta,\ c_1 = \frac{a\cos^2\beta}{\sqrt{\beta'^2+\cos^2\beta}} = -\frac{a\cos\beta}{a\cos\beta}(c_1 - \sin\beta),$$

$$c_1 = -(c_1 - \sin\beta),\quad \sin\beta = 2c_1$$

sein (an den beiden Grenzen), was sicher nicht allgemein der Fall ist.

Schlussbemerkung.

XIV. Das Ergebniss der Berechnung der Grössen k in XIII. ist nicht ein zufälliges, sondern gilt allgemein.

Hat man nämlich das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(k)}$$

zu einem M. M. zu machen, wo Φ die Form §. 8, II. haben kann, so ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(k')}$$

und wenn nun zwei Grenzkurven

$$\varphi(x, y) = 0,\quad \psi(x, y) = 0$$

gegeben sind, so hat man (vergl. VII.)

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi\, dx + k_1\varphi(x_1, \eta) + k_2\psi(x_2, \zeta)$$

nach x_1, x_2, c_1, c_2 zu differenziren (wo η, ζ die Werthe von y für $x = x_1, x_2$ sind). Daraus, wenn man durch angehängte Zeiger 1, 2 die Werthe für $x = x_1, x_2$ bezeichnet:

$$\Phi_2 + k_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\right) = 0,\ -\Phi_1 + k_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_2\frac{\partial\zeta}{\partial c_1} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_1\frac{\partial\eta}{\partial c_1} + k_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial c_1} + k_2\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial c_1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_2\frac{\partial\zeta}{\partial c_2} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)_1\frac{\partial\eta}{\partial c_2} + k_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial c_2} + k_2\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial c_2} = 0,$$

woraus sofort *):

$$k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)_1, \quad k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)_2;$$

$$k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \left(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)_1, \quad k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\left(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)_2.$$

Demnach hat man an der oberen Grenze, und dann an der unteren:

$$\left(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \left(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \text{(m)}$$

Dabei versteht es sich von selbst, dass in Φ nicht etwa x_1, x_2, η, ζ selbst vorkommen dürfen (§. 6, III.; §. 7, IV.).

XV. Soll die gefundene Kurve auf der Grenzkurve $\psi = 0$ senkrecht stehen, so muss (für $x = x_2$):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + y'\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

also

$$\left(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)y' = \frac{\partial \Phi}{\partial y'}, \quad \Phi y' = (1 + y'^2)\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \quad . \quad . \qquad \text{(m')}$$

natürlich für $x = x_2$ sein. Diese Bedingung ist in VI. und in §. 7 I. erfüllt.

---

*) Diese Gleichungen können entweder dadurch erhalten werden, dass man die zwei letzten der vier vorhergehenden Gleichungen unter die Form

$$A\frac{\partial \zeta}{\partial c_1} + B\frac{\partial \eta}{\partial c_1} = 0, \quad A\frac{\partial \zeta}{\partial c_2} + B\frac{\partial \eta}{\partial c_2} = 0$$

bringt, und daraus $A = 0$, $B = 0$ folgert; oder aber auch, indem man dieselben in herkömmlicher Weise nach k_1, k_2 auflöst.

Dritter Abschnitt.

Mehrere Funktionen derselben unabhängig Veränderlichen werden gesucht.

§. 10.

1. Es sind keine Bedingungsgleichungen vorhanden.

I. Die Aufgabe, die wir uns jetzt, das Seitherige verallgemeinernd, stellen, ist, die Funktionen

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

von x so zu bestimmen, dass die Grösse

$$\int_a^b f\,(x, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1', u_2', \ldots, u_n')\,dx \quad \ldots \quad \text{(b)}$$

ein Maximum oder Minimum (M. M.) werde, wenn a, b bestimmte, gegebene Grössen sind; wenn eben so die Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ für $x = a$, $x = b$ bestimmt (also unveränderlich) gegeben sind und wo

$$u_r' = \frac{d\,u_r}{d\,x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

Den Entwicklungen des §. 2 gemäss werden wir statt $u_1, \ldots, u_n$ die Grössen

$$\psi_1\,(x, \varepsilon), \psi_2\,(x, \varepsilon), \ldots, \psi_n\,(x, \varepsilon) \quad \ldots \quad \text{(d)}$$

in (b) einsetzen, wobei $\psi_r\,(x, \varepsilon)$ die Eigenschaft habe, für $\varepsilon = 0$ zu dem gesuchten Werthe von u_r zu werden; dann (b) nach ε differenziren und den Differentialquotienten, nachdem man in ihm $\varepsilon = o$ gesetzt, Null werden lassen.

Will man nach §. 2, IV. verfahren, so kann man auch statt u_r setzen

$$u_r + \varepsilon\,\delta u_r + \ldots, \text{ also statt } u_r' : u_r' + \varepsilon\,\delta u_r' + \cdots,$$

wo natürlich das jetzige u_r (u_r') das gesuchte ist, nach den Potenzen von ε entwickeln und den Koeffizienten der ersten Potenz Null setzen. Beide Betrachtungsweisen liefern selbstverständlich dieselben Ergebnisse.

Dabei werden wir wieder beachten, dass wenn U_r der Werth von u_r für eine der zwei Grenzen ist, man (§. 3, II.)

$$\frac{\partial U_r}{\partial \varepsilon} = 0, \text{ also auch } \delta U_r = 0$$

habe, und dass zugleich δU_r der Werth von δu_r an dieser Grenze ist.

Gleichungen des Maximums oder Minimums.

II. Es ist, wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n$ Abkürzungen für die (d) sind $\left[\text{und } \psi_r' = \frac{d\psi_r}{dx}\right]$:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b f(x, \psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_1', \ldots, \psi_n')\,dx = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \varepsilon} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial \psi_n}\frac{\partial \psi_n}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \psi_1'}\frac{\partial \psi_1'}{\partial \varepsilon} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \psi_n'}\frac{\partial \psi_n'}{\partial \varepsilon}\right] dx,$$

also (§. 2)

$$\delta\int_a^b f\,dx = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\delta u_n + \frac{\partial f}{\partial u_1'}\delta u_1' \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial u_n'}\delta u_n'\right] dx,$$

wo

$$\delta u_r' = \frac{d}{dx}\delta u_r,$$

und die u natürlich die gesuchten Funktionen bedeuten.

Da jedoch auch hier

$$\frac{\partial f}{\partial u_r'}\delta u_r' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u_r'}\delta u_r\right) - \delta u_r \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u_r'}\right),$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial u_r'}\,\delta u_r \text{ an den Grenzen Null *)},$$

so erhält man als Gleichung des M. M.:

$$0 = \delta\int_a^b f\,dx = \int_a^b\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_1'}\right)\delta u_1 + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial f}{\partial u_n} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_n'}\right)\delta u_n\right]dx.$$

Es bestehen nun zwischen den $u_1, \ldots, u_n$, unserer Annahme nach, keinerlei Beziehungen; dasselbe gilt also natürlich auch von den $\delta u_1, \ldots, \delta u_n$, welche mithin durchaus willkürlich bleiben. Dann ist aber die vorige Gleichung nur möglich, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_1'} = 0, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial u_n} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_n'} = 0, \quad (A)$$

welche Gleichungen sich allgemein durch

$$\frac{\partial f}{\partial u_r} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_r'} = 0, \; r = 1, 2, \ldots, n,$$

darstellen lassen.

Dadurch werden die sämmtlichen u (der Anzahl nach n) bestimmt und der eine Theil der Aufgabe ist erledigt. Die Entscheidung, ob M. M., werden wir nachher geben.

Bedingungen an den Grenzen.

III. Wäre statt des Integrals (b) das allgemeinere

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n')\,dx \quad \ldots\ldots \quad (b')$$

zu einem M. M. zu machen, so müssen noch Grenzbedingungen gegeben sein. Hinsichtlich derselben lässt sich das in §. 6, I. bis III. Gesagte geradezu hier wiederholen mit der kleinen Aenderung, dass jetzt von mehreren Funktionen die Rede ist. Man wird also, nachdem man die (A) benutzte, die Grössen x_1, x_2 und die durch Integration der (A) eingetretenen willkürlichen Konstanten so bestimmen, dass (b') zu einem M. M. wird und zugleich die Grenzbedingungen erfüllt sind.

*) Dies setzt allerdings voraus, dass $\frac{\partial f}{\partial u_r'}$ nicht unendlich sei an den Grenzen (d. h. für $x = a$ oder $x = b$).

Ist dabei c eine der eingetretenen Konstanten, so ist

$$\frac{d}{dc}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial c} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial u_1'}\frac{\partial u_1'}{dc} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n'}\frac{\partial u_n'}{\partial c}\right]dx;$$

aber wegen (A):

$$\frac{\partial f}{\partial u_r} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_r'};\ \frac{\partial f}{\partial u_r}\frac{\partial u_r}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial u_r'}\frac{\partial u_r'}{\partial c} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u_r'}\frac{\partial u_r}{\partial c}\right),$$

so dass (§. 7, VIII.)

$$\frac{d}{dc}\int_{x_1}^{x_2} f\,dx = \sum_{x=x_1}^{x=x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial u_1'}\frac{\partial u_1}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial u_2'}\frac{\partial u_2}{\partial c} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n'}\frac{\partial u_n}{\partial c}\right]. \quad (e)$$

Dies setzt freilich voraus, dass keiner der Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ für eine oder die andere Grenze in f vorkomme (§. 6, III.).

Auch das in §. 9, XIV. gefundene Resultat könnte hier verallgemeinert werden. Doch halten wir dies nicht für nothwendig, um bei den vielen Einzelfällen, die hier denkbar sind, nicht zu viele, immer leicht herzustellende Formeln, aufzuschreiben *).

2. Isoperimetrische Probleme.

IV. Gesetzt nun aber, es solle das Integral (b) allerdings ein M. M. werden, aber die Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ zugleich der Bedingung unterworfen sein, den Gleichungen

$$\int_a^b \varphi_1\,dx = A_1,\ \int_a^b \varphi_2\,dx = A_2, \ldots, \int_a^b \varphi_m\,dx = A_m \quad . (f)$$

zu genügen, wo $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ bekannte Funktionen von $x, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n'$ sind.

Jetzt treten natürlich die Betrachtungen des §. 8 wieder ein, und man wird aussprechen dürfen, dass Funktionen $u_1, \ldots, u_n$, welche

*) Dabei dürfen wir nicht vergessen, dass in II. vorausgesetzt ist, es sei u_r für die beiden Grenzwerthe gegeben. Es ist also nicht etwa gestattet, die u' an den Grenzen als gegeben anzusehen, und daraus die Integrationskonstanten zu bestimmen, da wir dann nicht das Recht hätten, die Gleichung $\delta U = 0$ als richtig anzunehmen (I.), was doch in II. geschehen ist. Die Grenzgleichungen dürfen also auch die u' nicht enthalten.

$$\int_a^b [f + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_m \varphi_m] \, dx \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

wo $a_1, \ldots, a_m$ (vorläufig beliebige) Konstanten sind, zu einem M. M. machen und zugleich den Integralen

$$\int_a^b \varphi_1 \, dx, \quad \int_a^b \varphi_2 \, dx, \ldots, \quad \int_a^b \varphi_m \, dx \quad . \quad . \quad . \quad (f')$$

unveränderliche Werthe ertheilen, die uns gestellte Aufgabe im Allgemeinen lösen, und sie auch im Besondern lösen, wenn man $a_1, \ldots, a_m$ so bestimmt, dass die (f) erfüllt sind. Jedes Funktionssystem, das in der eben bezeichneten Weise (g) zu einem M. M. macht, genügt unserer Aufgabe; aber auch jedes, das unserer Aufgabe genügt, ist in den vorigen enthalten.

Es gibt demnach keine andere Auflösungen, als die aus (g) hervorgehenden. Dabei ist es uns nun wieder ziemlich gleichgiltig, in welcher Weise man die eigenthümliche Bedingtheit der $\delta u_1, \ldots, \delta u_n$ analytisch ausdrücken könne, da das von keinem Einfluss auf unsere Auflösung ist.

Die $a_1, \ldots, a_m$ tragen den reinen Charakter beliebiger Konstanten, *sind* also von den Integrationskonstanten durchaus unabhängig.

V. Hieraus folgt, dass die jetzige Aufgabe zusammenfällt mit der ersten, oder besser gesagt sich auflösen lässt, wie diese, nur hat man statt f in (A) hier

$$f + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_m \varphi_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

zu setzen (m eine beliebige ganze Zahl, ohne eine nähere Beziehung zu n). Was in III. hinsichtlich der Grenzbedingungen gesagt ist, gilt ganz eben so hier. Nur muss eben f durch den Ausdruck (h) ersetzt werden und $a_1, \ldots, a_m$ hängen nicht von x_1, x_2, nebst den Integrationskonstanten, ab.

Die Entscheidung, ob M. M., wird natürlich auch wie bei der ersten Aufgabe gefällt, und wir werden beide zugleich erledigen.

Wir wenden uns nun zur dritten und wichtigsten der hier vorliegenden Aufgaben, die zugleich alle seitherigen umfasst.

§. 11.

3. Es sind Bedingungsgleichungen vorhanden.

I. Sei wieder das Integral

$$\int_a^b F(x, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n')\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

zu einem M. M. zu machen, wo F die Form in §. 10, I. oder IV. [Formeln (b) und (g)] haben kann; zugleich aber seien zwischen den $u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n'$ noch r Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_r = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

gegeben, wo natürlich $r < n$ sein muss, welche Gleichungen aber für alle x (innerhalb der Integrationsgrenzen wenigstens) gelten sollen. Dabei sind die $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ Funktionen von $x, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n'$ (und es wird im allgemeinsten Falle nothwendig *sein*, dass die Differentialquotienten der u ebenfalls vorkommen. Doch lassen wir das jetzt dahingestellt. Diese Funktionen haben natürlich keinerlei Zusammenhang mit den in §. 10, IV. vorkommenden).

Verfahren wir nach den allgemeinen Grundsätzen, so hat man für u_s zu setzen

$$u_s + \varepsilon \delta u_s + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

nach den Potenzen von ε zu entwickeln und den Koeffizienten der ersten Potenz von ε Null zu setzen.
Dies liefert:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\delta u_n + \frac{\partial F}{\partial u_1'}\delta u_1' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n'}\delta u_n'\right) dx = 0 \quad (c)$$

wo nun aber die δu (und also auch ihre Differentialquotienten $\delta u'$) nicht willkürlich sind, vielmehr da die Form (α) auch den (b) zu genügen hat, noch allgemein die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_2}\delta u_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_n}\delta u_n + \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1'}\delta u_1' + \cdots + \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_n'}\delta u_n' = o, \quad (d)$$

wo $s = 1, 2, \cdots, r$ ist, erfüllen müssen. Mittelst dieser Gleichungen müssen r der Variationen: $\delta u_1, \cdots, \delta u_n$ (etwa $\delta u_1, \cdots, \delta u_r$) durch die übrigen $n - r$ ausgedrückt werden, welche l e t z t e r e n d a n n a l l e r d i n g s g a n z w i l l k ü r l i c h b l e i b e n.

Wenn diese Vorschrift vielleicht im einzelnen Falle sich auch befolgen liesse, so wird man immerhin bequemer in der allgemeinern Weise verfahren, die wir jetzt angeben wollen. Ohnehin können wir, da in den (d) auch die Differentialquotienten der δu vorkommen, nicht im Allgemeinen die angegebene Eliminationsweise, die theoretisch freilich denkbar ist, vollziehen.

II. Wir multipliziren die (d) mit der noch unbestimmten Funktion λ_s von x und integriren sodann zwischen a und b (nach x). Dadurch erhalten wir

$$\int_a^b \lambda_s \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_n}\delta u_n + \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1'}\delta u_1' + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_n'}\delta u_n'\right) dx = 0,\ s = 1, \cdots, r.$$

Diese Gleichungen addiren wir zu (c), wobei wir das Summenzeichen Σ in der bekannten Weise brauchen, und erhalten:

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u_1} + \sum_1^r \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1}\right)\delta u_1 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial u_n} + \sum_1^r \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_n}\right)\delta u_n\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1'} + \sum_1^r \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1'}\right)\delta u_1' + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial u'} + \sum_1^r \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_n'}\right)\delta u_n'\right] dx = 0 \quad (c')$$

Diese Gleichung lässt sich nun in der bekannten Weise umschreiben. Es ist nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_1'}\delta u_1' = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_1'}\right)\delta u_1 + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1'}\delta u_1\right);$$

$$\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1}\delta u_1 + \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1'}\delta u_1' = \left[\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1'}\right)\right]\delta u_1$$
$$+ \frac{d}{dx}\left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1'}\delta u_1\right),$$

so dass, weil die δu an den Grenzen Null sind, wenn man setzt

$$\frac{\partial F}{\partial u_m} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_m'} + \sum_{s=1}^{s=n}\left[\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_m} - \frac{d}{dx}\left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_m'}\right)\right] = \Psi_m,$$

die (c′) wird:

$$\int_a^b (\Psi_1 \delta u_1 + \Psi_2 \delta u_2 + \cdots + \Psi_n \delta u_n)\, dx = 0 \quad . \quad (c'')$$

Wir denken nun die Grössen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ so bestimmt, dass r der Grössen Ψ in (c'') Null werden, was wir immer annehmen dürfen. Dadurch sind auch (wenn $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ Null wurden) $\delta u_1, \ldots, \delta u_r$ verschwunden, und es bleiben nur noch die ganz willkürlichen: $\delta u_{r+1}, \ldots, \delta u_n$ übrig. Da dann (c'') heisst

$$\int_a^b (\Psi_{r+1}\delta u_{r+1} + \cdots + \Psi_n \delta u_n)\, dx = 0\,^{*)} \quad . \quad (\beta)$$

und hier $\delta u_{r+1}, \cdots, \delta u_n$ durchaus willkürlich bleiben, so muss auch

$$\Psi_{r+1} = 0, \ldots, \Psi_n = 0$$

sein. Demnach wird man die u so zu bestimmen haben, dass

$$\Psi_1 = 0,\ \Psi_2 = 0, \ldots, \Psi_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

was mit den (b) zur Bestimmung der $n + r$ Grössen u und λ ausreicht.

III. Was nun aber die Bildung der Grössen Ψ betrifft, so wird man sofort übersehen, dass wenn man in §. 10, II. statt f setzt

$$F + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r = F + \sum_1^r \lambda_s \varphi_s \quad . \quad . \quad (d)$$

man aus den dortigen (A) die hiesigen (B) erhält (die λ als nicht u, u' enthaltend angesehen). Daraus ergiebt sich nunmehr als Vorschrift:

Man bestimme $u_1, \ldots, u_n$ nach den Regeln des §. 10 so, dass

$$\int_a^b (F + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

ein M. M. wird, wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ als nur von x abhängig angesehen sind, und verbinde mit den sich daraus ergebenden Gleichungen die (b), um die $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ zu bestimmen (oder auch zu eliminiren).

Damit ist der erste Haupttheil der Untersuchung erledigt.

IV. Hinsichtlich der Grenzgleichungen, Grenzwerthe unter dem Integralzeichen oder in den Bedingungsgleichungen gilt immer das

*) In dieser Gleichung sind nur noch die Variationen $\delta u_{r+1}, \ldots \delta u_n$. Wie man nun auch aus (c) die Variationen $\delta u_1, \ldots, \delta u_r$ eliminirt hat, immer muss die (β) erscheinen, da sie eben eine richtige Gleichung ist. Wegen der anzunehmenden Elimination sind aber $\delta u_{r+1}, \ldots, \delta u_n$ durchaus von einander unabhängig.

in §. 6 und §. 10, III. Gesagte, das wir also nicht zu wiederholen brauchen.

Doch mag hier abermals darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Grenzgleichungen nur die Werthe der u (und nicht der u') enthalten dürfen. Denn unsere Darstellung (§. 6) setzt voraus, dass man zuerst die Werthe (von x und) der u an den beiden Grenzen als fest ansehe, was man nur darf, wenn in diesen Grenzgleichungen blos diese Grössen und nicht auch die u' vorkommen.

Desshalb werden die (b), insofern sie im allgemeinsten Falle Differentialquotienten der u' enthalten, nicht als Grenzgleichungen verwendet werden*). Sie sind ohnehin für alle Werthe von x, also auch für die Grenzwerthe identisch erfüllt, würden somit als Grenzgleichungen auch Nichts leisten.

Enthält aber eine oder die andere Gleichung (b) keinen Differentialquotienten von u, so ist diese Gleichung in der Lage, als Grenzgleichung verwendet werden zu können, wobei nur zu beachten ist, dass sie, wenn man die gefundenen Werthe der u einsetzt, identisch erfüllt ist. Es ist dabei selbstverständlich, dass die Grenzbedingungen den (b) nicht widersprechen dürfen. (Vergl. Note zu §. 18, VIII.; dann §. 19, X., XI.)

Reduktion auf die kanonische Form.

IV. Sei

$$\Phi = F + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdot \cdot \cdot + \lambda_r \varphi_r \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

so ist das System der Gleichungen, das die u (nebst λ) bestimmt:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1'} = 0, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n'} = 0, \\ \varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_r = 0. \end{array}\right\} \ldots (B')$$

Wir wollen nun aus den Gleichungen

*) Die „Grenzgleichungen" sind immer gewisse Bedingungsgleichungen, denen die Werthe der u für $x = x_1, x_2$ noch genügen müssen. Da nun für alle Werthe von x die (b) stattfinden, so wird man für diese Untersuchungen (an den Grenzen, d. h. bei der Bestimmung von x_1, x_2 und den eingetretenen Konstanten) die Grösse (a) allein betrachten können, und nicht etwa unter dem Integralzeichen statt F die Grösse (d) setzen müssen. Doch hätte dies auch weiter Nichts auf sich, weil eben die (b) für jede mögliche Bestimmung der x_1, x_2 und der Konstanten ja erfüllt sind. Will man aber von dem in §. 7, VIII. (§. 9, XIV.) Dargestellten Gebrauch machen, so ist die letzte Form vorzuziehen, d. h. (a') statt (a) zu betrachten.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} = z_1, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n'} = z_n, \ \varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_r = 0 \quad . \ . \ (f)$$

die Grössen $u_1', \ldots, u_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ durch $x, u_1, \ldots, u_n, z_1, \ldots, z_n$ ausdrücken und in

$$\Phi - (z_1 u_1' + z_2 u_2' + \cdots + z_n u_n') \quad . \ . \ . \ (g)$$

einsetzen, wodurch sich diese Grösse in eine Funktion der vorhin genannten Veränderlichen umwandelt, die wir mit Ψ bezeichnen wollen *).

Sieht man nun also Ψ als Funktion von $x, u_1, \ldots, u_n, z_1, \ldots, z_n$ (wir wollen kürzer sagen: von x, u, z) an, so ist offenbar

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_r} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_r} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_1'}\frac{\partial u_1'}{\partial u_r} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n'}\frac{\partial u_n'}{\partial u_r'} - \left(z_1 \frac{\partial u_1'}{\partial u_r} + \cdots + z_n \frac{\partial u_n'}{\partial u_r}\right),$$

d. h. wegen der (f):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_r} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_r} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (h)$$

Dann weiter

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_r} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1'}\frac{\partial u_1'}{\partial z_r} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n'}\frac{\partial u_n'}{\partial z_r} - \left(z_1 \frac{\partial u_1'}{\partial z_r} + \cdots + z_n \frac{\partial u_n'}{\partial z_r} + u_r'\right),$$

d. h. wegen der (f):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_r} = -u_r'. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (h')$$

Daraus folgt, dass das System (B′) unter Berücksichtigung der (f) heisst:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = \frac{d z_1}{dx}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} = \frac{d z_n}{dx} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (i)$$

neben welchen Gleichungen natürlich noch die

$$\frac{du_1}{dx} = u_1', \ldots, \frac{du_n}{dx} = u_n' \quad . \ . \ . \ . \ . \ (i')$$

bestehen. Die Gleichungen (i), (i′) sind der Zahl nach $2n$ zwischen x als unabhängiger Veränderlichen und $u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n', z_1, \ldots, z_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$; wozu dann noch die (f) zu rechnen sind, so dass die Gesammtzahl der Gleichungen $3n + r$ ist.

---

*) Dies setzt allerdings voraus, dass die u' in den φ vorkommen. — Da ferner wegen der letzten r Gleichungen (f) die Grösse Φ sich beim Einsetzen in F umwandelt, so ist Ψ auch der Werth von $F - (u_1' z_1 + \cdots + u_n' z_n)$. Doch legen wir auf diese Einzelheiten keinen besonderen Nachdruck.

Wegen (h), (h') heissen die (i), (i') auch

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_1}{dx} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z_1}, \frac{du_2}{dx} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z_2}, \ldots, \frac{du_n}{dx} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z_n};\\ \frac{dz_1}{dx} &= \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \frac{dz_2}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{dz_n}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_n},\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

ein System von $2n$ gleichzeitigen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen x und $u_1, \ldots, u_n, z_1, \ldots, z_n$. Sind hieraus die letzten $2n$ Grössen bekannt und man setzt sie in (f) ein, so kann man auch noch $u_1', \ldots, u_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ bestimmen, wenn man dies will.

Die Integration der (C) löst die Aufgabe, die u zu bestimmen, d. h. (B') zu integriren. Da $2n$ willkürliche Konstante eingeführt werden, so erhält man also im Allgemeinen bei der uns vorliegenden Aufgabe diese Anzahl von eintretenden Konstanten*). Das System (C) hat die „kanonische Form“.

Dabei dürfen wir nicht ausser Acht lassen, dass die in §. 10 gelösten Aufgaben unter der jetzigen begriffen sind, wenn man nur die φ und λ ganz weglässt, also Φ kurzweg F setzt.

Integration des Systems (C).

V. In der Funktion Ψ, die nach IV. gebildet wurde und x, $u_1, \ldots, u_n, z_1, \ldots, z_n$ enthält, setzen wir

$$\frac{\partial z}{\partial u_1} \text{ für } z_1, \frac{\partial z}{\partial u_2} \text{ für } z_2, \ldots, \frac{\partial z}{\partial u_n} \text{ für } z_n,$$

wodurch dieselbe sich in W verwandle, und schreiben nun die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = W \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

*) Dies setzt voraus, dass unter den (b) keine Gleichung ist, die keine Differentialquotienten (der u) enthalte, oder dass keine solche sich aus denselben bilden lasse. In diesem Falle würde man mittelst der fraglichen Gleichung eine der Grössen u durch die andern ausdrücken können, so dass nur noch $n-1$ derselben bleiben würden. Dadurch würde sich die Anzahl der willkürlichen Konstanten um 2 vermindern. Aber auch, wenn unter den (b) eine Gleichung ist, welche sich unmittelbar integriren lässt, wird dieselbe wohl eine Konstante einführen, dann aber die Rolle einer Bedingungsgleichung ohne Differentialquotienten spielen, so dass thatsächlich dann eine Konstante weniger erscheinen würde. Für etwaige Grenzbedingungen würde natürlich hierdurch eine Einschränkung entstehen.

an, von der wir eine Auflösung der Form

$$z = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D')$$

suchen, wo V eine (bekannte, d. h. gefundene) Funktion von x, $u_1, \ldots, u_n$ mit den willkürlichen Konstanten $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ist, von welchen Konstanten aber keine blos addirt ist. Alsdann sind die Integralgleichungen von (C):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial u_1} = z_1, \; \frac{\partial V}{\partial u_2} = z_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial u_n} = z_n, \\ \frac{\partial V}{\partial b_1} = \beta_1, \; \frac{\partial V}{\partial b_2} = \beta_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial b_n} = \beta_n, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

wo $\beta_1, \ldots, \beta_n$ weitere n willkürliche Konstanten sind.

Dabei sind die z mit den übrigen Grössen durch die (f) verbunden; die n letzten Gleichungen (E) lösen übrigens unsere Aufgabe vollständig. Die n ersten, deren allgemeine Form

$$\frac{\partial V}{\partial u_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_m'},$$

können zu anderen Zwecken dienen. Wir haben nun den Beweis der Behauptung zu führen *).

VI. Um dies thun zu können bemerken wir, dass wenn ein System von $2n$ Gleichungen

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots, F_{2n} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

in dem $2n$ willkürliche Konstante vorkommen, als Integralsystem von (C) gelten soll, die Gleichungen

$$\frac{\partial F_m}{\partial x} - \frac{\partial F_m}{\partial u_1}\frac{\partial \Psi}{\partial z_1} - \frac{\partial F_m}{\partial u_2}\frac{\partial \Psi}{\partial z_2} - \ldots - \frac{\partial F_m}{\partial u_n}\frac{\partial \Psi}{\partial z_n}$$
$$+ \frac{\partial F_m}{\partial z_1}\frac{\partial \Psi}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial z_n}\frac{\partial \Psi}{\partial u_n} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k')$$

wo $m = 1, 2, \ldots, 2n$, identisch erfüllt sein müssen, wenn man nöthigenfalls die willkürlichen Konstanten aus (k') mittelst (k) eliminirt, oder auch die abhängigen Veränderlichen u und z ersetzt.

Denn aus den (k) folgt

$$\frac{\partial F_m}{\partial x} + \frac{\partial F_m}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial u_n}\frac{du_n}{dx} + \frac{\partial F_m}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial F_m}{\partial z_n}\frac{dz_n}{dx} = 0 \quad (l)$$

*) Man vergleiche meine „Integration der partiellen Differentialgleichungen“ (Stuttgart, Metzler), und zwar §. 9, V., und §. 10, V.

und da die Differentialquotienten der u und z dieselben sein müssen, wie in (C), wenn anders (k) ein Integralsystem jener Gleichungen ist, so erhält man (k'), wobei eine vorgängige Elimination, wie vorhin angegeben, nöthig sein kann.

Umgekehrt aber auch, wenn das System (k) mit $2n$ willkürlichen Konstanten die Eigenschaft hat, dass die (k') identisch erfüllt sind, nöthigenfalls mit der angegebenen Elimination, so ist dasselbe das Integralsystem von (C).

Denn aus (k) folgen (als ein System von Gleichungen zwischen $2n+1$ Veränderlichen) nothwendig die (l), und da die (k') identisch erfüllt sind, so ergeben sich aus der Verbindung beider Systeme: (k') und (l) die (C). Dabei ist es ganz wohl zulässig, dass man in *(l) die* willkürlichen Konstanten mittelst der (k) eliminire *). (Vergleiche XI.)

Mit diesen Bemerkungen wenden wir uns zum eigentlichen Beweise, den wir in zwei Abtheilungen führen.

1. $\frac{\partial V}{\partial u_m} = z_m$ ist eine Integralgleichung.

Dazu gehört $\left(F_m = \frac{\partial V}{\partial u_m} - z_m\right)$, dass

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_m \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial u_m \partial u_1}\frac{\partial \Psi}{\partial z_1} - \cdots - \frac{\partial^2 V}{\partial u_m \partial u_n}\frac{\partial \Psi}{\partial z_n} - \frac{\partial \Psi}{\partial u_m} = 0 \quad (\alpha)$$

identisch erfüllt sei, wenn man nöthigenfalls die (E) noch benutzt.

Nun aber genügt V identisch der (D); setzt man also $z = V$ in diese Gleichung ein, so kann man sie dann partiell nach jeder darin vorkommenden veränderlichen Grösse oder auch willkürlichen Konstanten differenziren.

Setzt man aber V für z in W ein, und lässt dann $\frac{\partial V}{\partial u_m}$ z. A. durch z_m bezeichnet sein, so verwandelt sich W natürlich in die Funktion Ψ. Differenzirt man nun partiell nach u_m, wobei also $\frac{\partial V}{\partial u_s}$ durch z_s bezeichnet sei, so ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_m \partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}\frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_m} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial z_n}\frac{\partial^2 V}{\partial u_n \partial u_m} + \frac{\partial \Psi}{\partial u_m},$$

*) Für weitere Untersuchungen in dieser Beziehung verweise ich auf mein Handbuch der Differential- und Integralrechnung.

und zwar identisch, wenn nur $z_s = \frac{\partial V}{\partial u_s}$, was auch sonst die Bedeutung der u ist. Wenn man also aus den (E) die Veränderlichen zieht, oder die Konstanten eliminirt, wo dann die n ersten (E) die nöthigen Beziehungen liefern, so ist (α) erfüllt, und der erste Theil unseres Beweises vollendet.

2. $\frac{\partial V}{\partial b_m} = \beta_m$ ist eine Integralgleichung.

Jetzt muss $\left(F_m = \frac{\partial V}{\partial b_m} - \beta_m\right)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_m \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial b_m \partial u_1}\frac{\partial \Psi}{\partial z_1} - \cdots - \frac{\partial^2 V}{\partial b_m \partial u_n}\frac{\partial \Psi}{\partial z_n} = 0 \;. \quad (\beta)$$

sein.

Differenzirt man aber wie vorhin die (D), nachdem z ersetzt ist, nach b_m, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_m \, dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}\frac{\partial^2 V}{\partial b_m \partial u_1} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial z_n}\frac{\partial^2 V}{\partial b_m \partial u_n},$$

welche Gleichung identisch ist, wenn nur $z_s = \frac{\partial V}{\partial u_s}$. Da *dies* aber der Fall ist, wenn man die (E) benutzt, so ist auch der zweite (und letzte) Theil unseres Beweises vollendet.

VII. Es ist selbstverständlich, dass man zur Integration des Systems (B'), um die es sich hauptsächlich handelt, jeden anderen beliebigen Weg einschlagen kann, da ohnehin der hier betretene nicht immer leicht zum Ziele führt. Es lässt sich nun aber, wenn man das eben genannte System durch irgend ein anderes Verfahren mit $2n$ willkürlichen Konstanten integrirt hat, aus dem Integralsystem die Funktion V, von der wir so eben gehandelt haben, ermitteln.

Herstellung von V aus einem Integralsystem.

VIII. Gesetzt, man habe in irgend einer Weise die Aufgabe gelöst, d. h. $u_1, \ldots, u_n$ ($u_1' \ldots, u_n', \lambda_1 \ldots, \lambda_r$) mit $2n$ willkürlichen Konstanten: $c_1, \ldots, c_{2n}$ bestimmt, so ist dadurch natürlich auch das Gleichungssystem (C) integrirt, wenn dort die z nach (f) ausgedrückt sind. Man kann also ein System von $2n$ Gleichungen zwischen x, $u_1, \ldots, u_n, z_1, \ldots, z_n$ mit den $2n$ willkürlichen Konstanten $c_1, \ldots, c_{2n}$ als bekannt ansehen, das die Gleichungen (C) integrirt.

Sei nun für den bestimmten Werth $x = a$ (wo a Null sein mag, wenn dies angeht):

$$u_1 = \mu_1,\ u_2 = \mu_2, \ldots,\ u_n = \mu_n;\ z_1 = \nu_1,\ z_2 = \nu_2, \ldots,\ z_n = \nu_n, \qquad \text{(m)}$$

so kann man, wenn man in die so eben angeführten $2n$ Gleichungen zu gleicher Zeit $x = a$ und für die u und z die Werthe (m) einsetzt, die Konstanten c durch die μ, ν ausdrücken. Daraus folgt, dass man die letzteren eben sowohl als die willkürlichen Konstanten des Integralsystems ansehen kann, so dass die Integralgleichungen durch

$$F_m\,(x, u_1, \ldots, u_n, z_1, \ldots, z_n, \mu_1, \ldots, \mu_n, \nu_1, \ldots, \nu_n) = 0,$$
$$m = 1, 2, \ldots, 2n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{m}')$$

dargestellt werden können.

Hat Ψ dieselbe Bedeutung wie in den (C), so setze man in

$$\Psi - z_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z_2} - \cdots - z_n \frac{\partial \Psi}{\partial z_n} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

die Werthe von u, z aus (m′) ein, wodurch sich dieselbe in eine Funktion von x (mit den μ, ν) verwandelt. Alsdann bilde man das *Integral*

$$\Omega = \int_a^x \left[\Psi - z_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z_2} - \cdots - z_n \frac{\partial \Psi}{\partial z_n}\right] dx \quad .\ . \quad (\delta)$$

in dem nur x, μ, ν vorkommen, löse nun die (m′) nach den $z_1, \ldots, z_n$, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ auf und setze für die $\nu_1, \ldots, \nu_n$ die so erhaltenen Werthe in Ω. Dann verwandelt sich dieses Integral in unsere Grösse V. Natürlich ist die Ermittelung des Integrals vorausgegangen. Um dieses zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass das so erhaltene V den (E) und auch der (D) genügt.

IX. Sei Ω' der Werth, der aus Ω hervorgeht, wenn man die ν in der angegebenen Weise ersetzt. Da man die (m′) benutzte bei der Bildung von Ω, dies aber die Integralgleichungen von (C) sind, so ist auch

$$\Omega = \int_a^x \left[\Psi + z_1 \frac{d u_1}{dx} + \cdots + z_n \frac{d u_n}{dx}\right] dx,$$

wenn man natürlich immer wieder die z und u ersetzt denkt in x, μ, ν. Daraus folgt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_m} = \int_a^x \left[\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_m} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial v_m} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial v_m}\right.$$

$$+ \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial v_m} + z_1 \frac{d}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial v_m} + \cdots + z_n \frac{d}{dx}\frac{\partial u_n}{\partial v_m}$$

$$\left. + \frac{du_1}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial v_m} + \cdots + \frac{du_n}{dx}\frac{\partial z_n}{\partial v_m}\right] dx$$

$$= \int_a^x \left[\frac{dz_1}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial v_m} + \cdots + \frac{dz_n}{dx}\frac{\partial u_n}{\partial v_m} - \frac{du_1}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial v_m}\right.$$

$$- \cdots - \frac{du_n}{dx}\frac{\partial z_n}{\partial v_m} + z_1 \frac{d}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial v_m} + \cdots + z_n \frac{d}{dx}\frac{\partial u_n}{\partial v_m}$$

$$\left. + \frac{du_1}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial v_m} + \cdots + \frac{du_n}{dx}\frac{\partial z_n}{\partial v_m}\right] dx$$

$$= \int_a^x \left[\frac{d}{dx}\left(z_1 \frac{\partial u_1}{\partial v_m}\right) + \cdots + \frac{d}{dx}\left(z_n \frac{\partial u_n}{\partial v_m}\right)\right] dx.$$

Nun ist für $x = a$ nothwendig

$$\frac{\partial u_s}{\partial v_m} = 0.$$

Denn ist

$$u_s = \psi\,(x, \mu_1, \ldots, \mu_n, v_1, \ldots, v_n), \text{ also } \mu_s = \psi\,(a, \mu_1, \ldots, v_n),$$

so hat man

$$u_s - \mu_s = \psi\,(x, \mu_1, \ldots, \mu_n, v_1, \ldots, v_n) - \psi\,(a, \mu_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial v_m} = \frac{\partial \psi\,(x, \mu_1, \ldots, v_n)}{\partial v_m} - \frac{\partial \psi\,(a, \mu_1, \ldots, v_n)}{\partial v_m},$$

und es ergiebt sich unsere Behauptung als augenscheinlich richtig. Demnach

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_m} = z_1 \frac{\partial u_1}{\partial v_m} + z_2 \frac{\partial u_2}{\partial v_m} + \cdots + z_n \frac{\partial u_n}{\partial v_m}.$$

Dann

$$\frac{\Omega'}{u_m}=\frac{\partial \Omega}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_m}+\cdots+\frac{\partial \Omega}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial u_m}$$

$$=\left(z_1\frac{\partial u_1}{\partial v_1}+\cdots+z_n\frac{\partial u_n}{\partial v_1}\right)\frac{\partial v_1}{\partial u_m}$$

$$+\cdots+\left(z_1\frac{\partial u_1}{\partial v_n}+\cdots+z_n\frac{\partial u_n}{\partial v_n}\right)\frac{\partial v_n}{\partial u_m}$$

$$=z_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_m}+\cdots+\frac{\partial u_1}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial u_m}\right)$$

$$+\cdots+z_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_m}+\cdots+\frac{\partial u_n}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial u_m}\right)$$

$$=z_1\frac{\partial u_1}{\partial u_m}+\cdots+z_n\frac{\partial u_n}{\partial u_m}=z_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

ndem

$$\frac{\partial u_s}{\partial u_m}=0, \text{ wenn } s, m \text{ verschieden}; \ \frac{\partial u_m}{\partial u_m}=1.$$

Ferner wie oben

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_m}=z_1\frac{\partial u_1}{\partial \mu_m}+\cdots+z_n\frac{\partial u_n}{\partial \mu_m}-v_m,$$

weil für $x=a$ nothwendig

$$\frac{\partial u_m}{\partial \mu_m}=1$$

wird. Also

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \mu_m}=\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_m}+\frac{\partial \Omega}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m}+\cdots+\frac{\partial \Omega}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial \mu_m}$$

$$=-v_m+z_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \mu_m}+\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m}+\cdots+\frac{\partial u_1}{\partial v_n}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m}\right)$$

$$+\cdots+z_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial \mu_m}+\frac{\partial u_n}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m}+\cdots+\frac{\partial u_n}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial \mu^m}\right).$$

Hier sind natürlich die u als Funktionen der μ, v, letztere wieder als durch μ ersetzt, angesehen. Demnach ist

$$\frac{\partial u_s}{\partial \mu_m}+\frac{\partial u_s}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m}+\cdots+\frac{\partial u_s}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial \mu_m}=\frac{d u_s}{d \mu_m},$$

und wenn man in u_s, welche Grösse als Funktion von x, μ, v mittelst der (m) ausgedrückt ist, die v wieder mittelst derselben Gleichungen ersetzt, so fallen die μ, x aus und es bleibt einzig u_s stehen. Demnach ist

$$\frac{d u_s}{d \mu_m}=0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_m} = \int_a^x \left[\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_m} + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial v_m} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial v_m}\right.$$

$$+ \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial v_m} + z_1 \frac{d}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial v_m} + \cdots + z_n \frac{d}{dx}\frac{\partial u_n}{\partial v_m}$$

$$\left. + \frac{d u_1}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial v_m} + \cdots + \frac{d u_n}{dx}\frac{\partial z_n}{\partial v_m}\right] dx$$

$$= \int_a^x \left[\frac{d z_1}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial v_m} + \cdots + \frac{d z_n}{dx}\frac{\partial u_n}{\partial v_m} - \frac{d u_1}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial v_m}\right.$$

$$- \cdots - \frac{d u_n}{dx}\frac{\partial z_n}{\partial v_m} + z_1 \frac{d}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial v_m} + \cdots + z_n \frac{d}{dx}\frac{\partial u_n}{\partial v_m}$$

$$\left. + \frac{d u_1}{dx}\frac{\partial z_1}{\partial v_m} + \cdots + \frac{d u_n}{dx}\frac{\partial z_n}{\partial v_m}\right] dx$$

$$= \int_a^x \left[\frac{d}{dx}\left(z_1 \frac{\partial u_1}{\partial v_m}\right) + \cdots + \frac{d}{dx}\left(z_n \frac{\partial u_n}{\partial v_m}\right)\right] dx.$$

Nun ist für $x = a$ nothwendig

$$\frac{\partial u_s}{\partial v_m} = 0.$$

Denn ist

$$u_s = \psi\,(x, \mu_1, \ldots, \mu_n, v_1, \ldots, v_n), \text{ also } \mu_s = \psi\,(a, \mu_1, \ldots, v_n),$$

so hat man

$$u_s - \mu_s = \psi\,(x, \mu_1, \ldots, \mu_n, v_1, \ldots, v_n) - \psi\,(a, \mu_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial v_m} = \frac{\partial \psi\,(x, \mu_1, \ldots, v_n)}{\partial v_m} - \frac{\partial \psi\,(a, \mu_1, \ldots, v_n)}{\partial v_m},$$

und es ergiebt sich unsere Behauptung als augenscheinlich richtig. Demnach

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v_m} = z_1 \frac{\partial u_1}{\partial v_m} + z_2 \frac{\partial u_2}{\partial v_m} + \cdots + z_n \frac{\partial u_n}{\partial v_m}.$$

Dann

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial u_m} = \frac{\partial \Omega}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_m} + \cdots + \frac{\partial \Omega}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial u_m}$$

$$= \left(z_1 \frac{\partial u_1}{\partial v_1} + \cdots + z_n \frac{\partial u_n}{\partial v_1}\right)\frac{\partial v_1}{\partial u_m}$$

$$+ \cdots + \left(z_1 \frac{\partial u_1}{\partial v_n} + \cdots + z_n \frac{\partial u_n}{\partial v_n}\right)\frac{\partial v_n}{\partial u_m}$$

$$= z_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_m} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial u_m}\right)$$

$$+ \cdots + z_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_m} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial u_m}\right)$$

$$= z_1 \frac{\partial u_1}{\partial u_m} + \cdots + z_n \frac{\partial u_n}{\partial u_m} = z_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varepsilon)$$

indem

$$\frac{\partial u_s}{\partial u_m} = 0, \text{ wenn } s, m \text{ verschieden}; \; \frac{\partial u_m}{\partial u_m} = 1.$$

Ferner wie oben

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_m} = z_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mu_m} + \cdots + z_n \frac{\partial u_n}{\partial \mu_m} - v_m,$$

weil für $x = a$ nothwendig

$$\frac{\partial u_m}{\partial \mu_m} = 1$$

wird. Also

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \mu_m} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_m} + \frac{\partial \Omega}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m} + \cdots + \frac{\partial \Omega}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial \mu_m}$$

$$= - v_m + z_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \mu_m} + \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial v_n}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m}\right)$$

$$+ \cdots + z_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial \mu_m} + \frac{\partial u_n}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial \mu^m}\right).$$

Hier sind natürlich die u als Funktionen der μ, v, letztere wieder als durch μ ersetzt, angesehen. Demnach ist

$$\frac{\partial u_s}{\partial \mu_m} + \frac{\partial u_s}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial \mu_m} + \cdots + \frac{\partial u_s}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial \mu_m} = \frac{du_s}{d\mu_m},$$

und wenn man in u_s, welche Grösse als Funktion von x, μ, v mittelst der (m) ausgedrückt ist, die v wieder mittelst derselben Gleichungen ersetzt, so fallen die μ, x aus und es bleibt einzig u_s stehen. Demnach ist

$$\frac{du_s}{d\mu_m} = 0,$$

und folglich

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \mu_m} = -\nu_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon')$$

Aus (ε), (ε') folgt sofort, dass Ω' die in (E) vorkommende Grösse V ist, wenn die dortigen b die jetzigen μ, die dortigen β die jetzigen ν sind.

X. Dann ist aber auch

$$\frac{d\Omega'}{dx} = \Psi - z_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} - \cdots - z_n \frac{\partial \Psi}{\partial z_n} \text{ und auch}$$

$$= \frac{\partial \Omega'}{\partial x} + \frac{\partial \Omega'}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial \Omega'}{\partial u_n} \frac{du_n}{dx}$$

$$= \frac{\partial \Omega'}{\partial x} + z_1 \frac{du_1}{dx} + \cdots + z_n \frac{du_n}{dx}, \text{ wegen } (\varepsilon)$$

$$= \frac{\partial \Omega'}{\partial x} - z_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} - \cdots - z_n \frac{\partial \Psi}{\partial z_n}, \text{ wegen (C)},$$

indem ja immer die u diesem Systeme genügen. Dabei ist allerdings ein Ersetzen der z, ν durch u, μ noch zu denken.

Aus diesen Gleichungen folgt sofort

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial x} = \Psi,$$

und da hier z_m aus (m'), also aus (ε) zu ersetzen ist, so ergiebt sich, dass dies die aus (D) folgende Gleichung ist, wenn man dort z durch Ω' ersetzt (und wo, wie in der Ordnung, nur u, μ vorkommen). Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Beweis, dass (E) ein vollständiges Integralsystem ist.

XI. Wir setzen voraus, es sei (D') eine vollständige Lösung von (D), d. h. wenn man aus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial u_1} = \frac{\partial V}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial u_n} = \frac{\partial V}{\partial u_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

die willkürlichen Konstanten $b_1, \ldots, b_n$ eliminirt, muss die (D) zum Vorschein kommen. Diese Elimination ist aber nur möglich, wenn man aus den n letzten Gleichungen (p) die Grössen b durch x, u, $\frac{\partial z}{\partial u}$ ausdrücken kann. Dies also setzen wir hier voraus. Um diese Voraussetzung analytisch zu formuliren, überlegen wir, dass wenn $b_1, \ldots, b_n$ aus den fraglichen Gleichungen gefunden werden sollen, dies eben heisst, es liessen sich diese Grössen als Funktionen von $\frac{\partial z}{\partial u}$

herstellen, so dass wir offenbar die eben geforderte Auflösung als besonderen Fall einer allgemeineren Aufgabe erkennen, die heisst: Die Bedingung festzustellen, dass aus den n Gleichungen

$$\psi_1 = v_1, \quad \psi_2 = v_2, \ldots, \quad \psi_n = v_n \quad \ldots \ldots \quad (q)$$

in denen die ψ Funktionen der Grössen $y_1, \ldots, y_n$ sind, sich die y durch die v ausdrücken lassen.

Nehmen wir dies einmal ein, so erscheinen die y als bestimmte Funktionen der v und man erhält aus den (q), wenn man nach v_s differenzirt:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial v_s} + \cdots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial v_s} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial v_s} + \cdots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial v_s} = 0, \end{array}\right\} \ldots \ldots \quad (q')$$

wo alle zweiten Seiten Null sind, mit Ausnahme der s^{ten} Gleichung, in der die zweite Seite 1 ist. Sind nun die y alle bestimmte Funktionen von v, so müssen die Differentialquotienten der y nach v_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ eben solche sein, so dass also, wenn man die (q′) nach den Differentialquotienten auflöst, diese bestimmte Werthe erhalten. Dies ist auch immer der Fall, wenn nicht

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2}, \ldots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}, \ldots, & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2}, \ldots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (r)$$

Diese Gleichung ist somit ganz gewiss nicht erfüllt, wenn die (q) sich nach den y auflösen lassen.

Umgekehrt nun aber auch, wenn die (r) stattfindet, lassen sich die Differenzialquotienten der y nach den v aus den (q) nicht finden, und ist folglich eine Auflösung der (q) nach den y nicht möglich (d. h. eine Bestimmung der y als Funktionen der v)*). Da wir nun

*) Also wenn (r) nicht stattfindet, muss eine Auflösung der (q) nach den y möglich sein. Denn entweder ist sie möglich, oder nicht. Ist sie nicht möglich, so kann man die Differentialquotienten auch nicht bestimmen, und folglich muss (r) stattfinden. Da dies nun nicht der Fall ist, so ist nothwendig die Voraussetzung (der Nichtauflösbarkeit) falsch.

annehmen, aus den n letzten Gleichungen (p) lassen sich die b finden, so wird folglich $\left(y = b,\ v = \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial u_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_n \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial u_2}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_n \partial u_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial u_n}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial u_n}, & \ldots, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_n \partial u_n} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (r')$$

nicht stattfinden.

XII. Soll nun (E), bezüglich die n letzten Gleichungen jenes Systems, ein **vollständiges** Integralsystem von (C) sein, so müssen die Gleichungen sich nach $u_1, \ldots, u_n$ lösen lassen. Dies ist entschieden der Fall, wenn nicht

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial b_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial b_1}, & \ldots, & \frac{\partial^2 V}{\partial u_n \partial b_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial b_n}, & \frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial b_n}, & \ldots, & \frac{\partial^2 V}{\partial u_n \partial b_n} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Da diese Gleichung aber mit (r′) bekanntlich zusammenfällt, so ist damit auch die Möglichkeit der Auflösung, also unsere Behauptung, erwiesen.

§. 12.

Verallgemeinerung der Untersuchungen der früheren Abschnitte.

I. Sei y als Funktion von x so zu bestimmen, dass

$$\int_a^b f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) dx \quad \ldots\ldots$$

ein M. M. wird, wobei etwa noch Bedingungen wie die (b gegeben sein können, wenn die dortigen $F_1, F_2, \ldots$ Funl $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$ (in beliebiger Zahl) sind.

Die vorgelegte Aufgabe fällt zusammen mit der in stellten, wenn wir setzen

$$y = u_1,\ \frac{dy}{dx} = u_2, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u_n,$$

wodurch dann die Grösse (a) zu

$$\int_a^b f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n, u'_n)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a')$$

wird. Dabei aber hat man noch festzustellen, dass

$$\frac{du_1}{dx} = u_2,\ \frac{du_2}{dx} = u_3, \ldots, \frac{du_{n-1}}{dx} = u_n,$$

damit wirklich aus $u_1 = y$ sofort alle übrigen Beziehungen folgen. Diese Gleichungen können wir auch schreiben

$$u_1' - u_2 = 0,\ u_2' - u_3 = 0, \ldots, u'_{n-1} - u_n = 0, \qquad (b)$$

und dieselben vertreten nun die (b) in §. 11, I. ($r = n - 1$).

Daraus folgt (§. 11, III.), dass man die Grösse

$$\int_a^b [f + \lambda_1 (u_1' - u_2) + \cdots + \lambda_{n-1} (u'_{n-1} - u_n)]\, dx \quad . \quad . \quad (a'')$$

nach den Vorschriften in §. 10, II. zu behandeln habe, wodurch sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{d\lambda_1}{dx} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u_2} - \lambda_1 - \frac{d\lambda_2}{dx} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u_3} - \lambda_2 - \frac{d\lambda}{} \ldots 0, \ldots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} - \lambda_{n-2} - \frac{d\lambda_{n-1}}{dx} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u_n} - \lambda_{n-1} - \ldots \qquad (c)$$

ergeben. Eliminirt man hieraus $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ s…

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial u_3} - \cdots \pm \ldots,$$

oder in den früheren Zeichen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots \ldots = 0 \ . \quad (F)$$

Dies ist in … mmlichen T… ung, welche y bestimmt. Di… dieser G… Allgemeinen $2n$ willkürliche … n (§. 1…

… glei…

II. Liegt … rös…

zu einem M. M. zu machen, so ist die Bestimmung von y dieselbe wie in I. (d. h. die Bestimmung der u). Dann tritt noch, wenn $c_1, \ldots, c_{2n}$ die willkürlichen Konstanten sind, die Aufgabe hinzu

$$J = \int_{x_1}^{x_2} [f(x, u_1 \ldots, u'_n) + \lambda_1 (u_1' - u_2) + \ldots + \lambda_{n-1} (u'_{n-1} - u_n)]\, dx$$

nach x_1, x_2, c zu differenziren (vergl. §. 7, VIII.; §. 9, XIV. und §. 11, III. Note).

Wegen der (b) ist (wenn f weder x_1 noch x_2 enthält)

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = -\overset{x=x_1}{\Big|} f, \quad \frac{\partial J}{\partial x_2} = \overset{x=x_2}{\Big|} f,$$

so dass hier die λ ganz wegfallen. Dann ist, wenn die Grösse unter dem Integralzeichen Φ heisst und c eine der Integrationskonstanten ist:

$$\frac{dJ}{dc} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial c} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} \frac{\partial u_1'}{\partial c} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n'} \frac{\partial u_n'}{\partial c}\right] dx,$$

d. h. (§. 7, VIII.) wegen der (B) in §. 11, II.:

$$\frac{dJ}{dc} = \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} \frac{\partial u_1}{\partial c}\right) + \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_2'} \frac{\partial u_2}{\partial c}\right) + \cdots + \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_n'} \frac{\partial u_n}{\partial c}\right).$$

Nun ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} = \lambda_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_2'} = \lambda_2, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u'_{n-1}} = \lambda_{n-1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_n'} = \frac{\partial f}{\partial u_n'},$$

so dass

$$\frac{dJ}{dc} = \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \left(\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial c} + \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial c} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial u_n'} \frac{\partial u_n}{\partial c}\right) \quad \text{(e)}$$

Aber aus (c) folgt

$$\lambda_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial u_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_n'},$$

$$\lambda_{n-2} = \frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_n} + \frac{d^2}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_n'},$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_3} + \cdots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial u_n'},$$

so dass

$$\frac{dJ}{dc} = \sum_{x=x_1}^{x=x_2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial c}\left(\frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_3} + \cdots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{\partial f}{\partial u_n'}\right)\right.$$

$$+ \frac{\partial u_2}{\partial c}\left(\frac{\partial f}{\partial u_3} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_4} + \cdots \mp \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\frac{\partial f}{\partial u_n'}\right)$$

$$\vdots \qquad \ldots \text{(f)}$$

$$+ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial c}\left(\frac{\partial f}{\partial u_n} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_n'}\right)$$

$$\left. + \frac{\partial u_n}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial u_n'}\right]$$

ist. In den anderen Zeichen:

$$\frac{dJ}{dc} = \sum_{x=x_1}^{x=x_2} \left[\frac{\partial y}{\partial c}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''} + \cdots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)\right.$$

$$+ \frac{\partial y'}{\partial c}\left(\frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y^{(3)}} + \cdots \mp \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)$$

$$+ \frac{\partial y''}{\partial c}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(3)}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y^{(4)}} + \cdots \pm \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)$$

$$\left. + \cdots + \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right] \qquad \ldots \text{(f')}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Formeln in §. 7, VIII. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Grenzwerthe der u in f nicht vorkommen, und zu beachten, dass die „Grenzgleichungen" nicht $y^{(n)}$ enthalten dürfen (§. 10, III.; §. 6, I. Noten).

Besondere Fälle für die Gleichung (F).

III. Hat die Funktion f die Form $\varphi + \psi y^{(n)}$, wo φ, ψ die Grösse $\frac{d^n y}{dx^n}$ ($= y^{(n)}$) nicht enthalten, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = \psi$$

und also wird in (F) der höchste Differentialquotient nicht der von der Ordnung $2n$ sein. In diesem Falle ist (F) nur von der Ordnung $2n - 2$. Denn die zwei letzten Glieder heissen

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}-\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^n}=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]$$
$$=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}}+y^{(n)}\frac{\partial \psi}{\partial y^{(n-1)}}-\frac{\partial \psi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}y'-\cdots-\frac{\partial \psi}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}\right]$$
$$=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}}-\frac{\partial \psi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}y'-\cdots-\frac{\partial \psi}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}\right]$$

und der höchste darin vorkommende Differentialquotient ist $y^{(2n-2)}$; da dann auch in den früheren Gliedern kein höherer vorkommt, so ist unsere Behauptung erwiesen (§. 3, V.).

In diesem Falle treten in die Integralgleichung nur $2n-2$ Konstanten ein, und es wird also für den Fall fester Grenzen (I.) die Aufgabe im Allgemeinen nicht lösbar sein, da die Grenzwerthe von $u_1, u_2, \ldots u_n$, d. h. $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, der Zahl nach $2n$, gegeben sind, während nur $2n-2$ Grössen bestimmt werden müssen. Dasselbe gilt auch für die nicht festen Grenzen (II.), da hier immer die Dinge so liegen müssen, dass wenn man x_1, x_2 als gegeben ansieht, auch $u_1, \ldots, u_n$ gegeben sind.

IV. Sind in f die Grössen $y, y', \ldots, y^{(m)}$ nicht enthalten, so heisst die (F):

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\frac{\partial f}{\partial y^{(m+1)}}-\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}\frac{\partial f}{\partial y^{(m+2)}}+\cdots\pm\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}=0,$$

und liefert sofort

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(m+1)}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y^{(m+2)}}+\cdots\pm\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}=C_1+C_2x+\cdots+C_mx^m(g)$$

Für $m=0$, d. h. wenn y nicht in f enthalten ist, hat man

$$\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''}+\cdots\pm\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}=C \text{ (§. 3, VI.).}$$

V. Enthält f die Grösse x nicht entwickelt, so ist

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''+\cdots+\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}y^{(n+1)};$$

also wenn man hieraus $y'\frac{\partial f}{\partial y}$ zieht, die (F) mit y' multiplizirt und den Werth der vorhin bestimmten Grösse einsetzt:

$$\frac{df}{dx}-\left(y''\frac{\partial f}{\partial y'}+\cdots+y^{(n+1)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)-y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+y'\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''}$$
$$-\cdots\pm y'\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}=0.$$

Aber $y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)$;

$$y^{(3)} \frac{\partial f}{\partial y''} - y' \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} = \frac{d}{dx}\left[y'' \frac{\partial f}{\partial y''} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''}\right];$$

$$\vdots$$

$$y^{(n+1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} + (-1)^{n+1} y' \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = \frac{d}{dx}\left[y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} - y^{(n-1)} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} + y^{(n-2)} \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} - \cdots + (-1)^{n+1} y' \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right],$$

so dass

$$-y'' \frac{\partial f}{\partial y'} - y^{(3)} \frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots - y^{(n+1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots + (-1)^{n+1} y' \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$$
$$= -\frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{d}{dx}\left[y'' \frac{\partial f}{\partial y''} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''}\right] - \cdots - \frac{d}{dx}\left[y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} - \cdots + (-1)^{n+1} y' \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right],$$

und folglich die (F):

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - \left[y'' \frac{\partial f}{\partial y''} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''}\right] - \cdots - \left[y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} - \cdots + (-1)^{n+1} y' \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right] = C,$$

oder auch (§. 3, VII.):

$$\left.\begin{array}{l} f - y' \left[\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} + \cdots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right] \\ - y'' \left[\frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y^{(3)}} - \cdots \mp \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right] \\ - \cdots \\ \vdots \\ - y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \end{array}\right\} = C.$$

VI. Ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots \pm \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \text{ identisch Null,}$$

so ist (a) oder (d) unmittelbar integrirbar und die Aufgabe gehört nicht dem Gebiete der Variationsrechnung an (§. 22, III.).

Wäre die vorhin genannte Grösse einer Konstanten gleich, so wäre die Aufgabe unlösbar.

§. 13.

Allgemeinste Form für den Fall zweier abhängig Veränderlichen.

Wenn auch die Darstellung in §. 10 und 11 alle Fälle umfasst, so mag es doch gerathen sein, wie schon in §. 12 geschehen, gewisse besondere Fälle, die immerhin auch allgemeiner Natur sind, auch noch besonders hervorzuheben. Wir wählen hier dazu die Aufgabe, da zwei Funktionen, y und z, von x so sollen bestimmt werden, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}, z, \frac{dz}{dx}, \cdots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) dx \quad . \quad . \quad (a)$$

ein M. M. werde. Dabei müssen wir zwei wesentliche Fälle unterscheiden.

1. Es besteht zwischen y und z keine Gleichung.

I. Jetzt ist in §. 11:

$$u_1 = y,\ u_2 = \frac{dy}{dx},\ \cdots,\ u_n = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ u_{n+1} = z,\ u_{n+2} = \frac{dz}{dx},$$
$$\cdots,\ u_{n+m} = \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}};$$

die dortigen (b):

$$u_1' = u_2,\ u_2' = u_3, \ldots,\ u_{n-1}' = u_n;\ u_{n+1}' = u_{n+2},\ u_{n+2}' = u_{n+3},$$
$$\cdots,\ u_{n+m-1}' = u_{n+m},$$

also $r = n + m - 2$. Die dortige (d):

$$f(x, u_1, u_2, \cdots, u_{n+m}, u_n', u_{n+m}') + \lambda_1 (u_1' - u_2) + \cdots + \lambda_{n-1} (u_{n-1}' - u_n)$$
$$+ \mu_1 (u_{n+1}' - u_{n+2}) + \cdots + \mu_{m-1} (u_{n+m-1}' - u_{n+m});$$

die (B'):

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{d\lambda_1}{dx} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u_2} - \lambda_1 - \frac{d\lambda_2}{dx} = 0, \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} - \lambda_{n-2}$$
$$- \frac{d\lambda_{n-1}}{dx} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u_n} - \lambda_{n-1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_n'} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_{n+1}} - \frac{d\mu_1}{dx} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u_{n+2}} - \mu_1 - \frac{d\mu_2}{dx} = 0, \ldots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_{n+m-1}} - \mu_{m-2} - \frac{d\mu_{m-1}}{dx} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u_{n+m}} - \mu_{m-1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial u_{n+m}'} = 0$$

Hieraus folgt, wenn man die u ersetzt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''}-\cdots\pm\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}&=0,\\ \frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial z''}-\cdots\pm\frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}}&=0,\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (G)$$

aus welchen zwei Gleichungen y, z folgen (mit $2n + 2m$ willkürlichen Konstanten). Auch das in §. 12, II. gefundene Resultat lässt sich hier leicht herstellen.

2. Es besteht zwischen y und z eine Gleichung.

II. Sei nun aber

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ry}{dx^r}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^sz}{dx^s}\right) = 0 \quad .\ .\ .\ (b)$$

die Gleichung, welche zwischen y und z stattfindet, wo es nicht gegen die Möglichkeit der Auflösung verstossen würde, dass etwa $r > n$, $s > m$ sei.

In diesem Falle werden wir die (b) eben als eine neue Bedingungsgleichung im Sinne des §. 11, I. behandeln. Um uns aber die Auflösung gehörig zurecht zu legen, wollen wir, wenn v eine noch *unbekannte* Funktion von x ist, zuerst

$$f + v\varphi = \psi \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . (c)$$

setzen, wo nun ψ eine Funktion von x, y, z und deren Differentialquotienten ist. Der höchste in ψ vorkommende Differentialquotient von y sei der $p$te, der höchste von z der $q$te (wo $p = n$ oder r ist, $q = m$ oder s).

Dann hat man die Auflösung in I., wenn man ψ für f, p für n, q für m setzt. Demgemäss sind y, z, v zu bestimmen aus (b) und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \psi}{\partial y'}+\cdots\pm\frac{d^p}{dx^p}\frac{\partial \psi}{\partial y^{(p)}}&=0,\\ \frac{\partial \psi}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \psi}{\partial z'}+\cdots\pm\frac{d^q}{dx^q}\frac{\partial \psi}{\partial z^{(q)}}&=0.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ (H)$$

Soll die Zahl der eintretenden willkürlichen Konstanten $2(p+q)$ sein (nach §. 11, IV.), so muss einer der höchsten Differentialquotienten in φ vorkommen.

Die (b) in §. 11 sind nämlich hier, da $u_1, \ldots, u_{p+q}$, eingeführt sind:

$$u_1' = u_2, \ldots, \quad u_{p-1}' = u_p, \quad u_{p+1}' = u_{p+2}, \quad u_{p+2}' = u_{p+3}, \ldots, \\ u_{p+q-1}' = u_{p+q}, \quad \varphi = 0,$$

also wenn man

$$\Phi = f + \nu\varphi + \lambda_1(u_1' - u_2) + \cdots + \lambda_{p-1}(u_{p-1}' - u_p)$$
$$+ \lambda_{p+1}(u_{p+1}' - u_{p+2}) + \cdots + \lambda_{p+q-1}(u_{p+q-1}' - u_{p+q})$$

setzt (wo λ_p durch ν vertreten ist), und $z_1, \ldots, z_{p+q}$ einführt aus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} = z_1, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{p+q}'} = z_{p+q}, \; u_1' = u_2, \ldots, u_{p-1}' = u_p,$$
$$u_{p+1}' = u_{p+2}, \ldots, u_{p+q-1} = u_{p+q}, \; \varphi = 0,$$

so hat man hieraus $u_1', \ldots, u_{p+q}', \lambda_1, \ldots, \lambda_{p+q-1}$ auszudrücken. Nun kommt in $f + \nu\varphi = \psi$ an Differentialquotienten der u nur u_p', u_{p+q}' vor; demnach heissen die $p + q$ Gleichungen, welche die z bestimmen:

$$\lambda_1 = z_1, \; \lambda_2 = z_2, \ldots, \lambda_{p-1} = z_{p-1}, \; \frac{\partial \psi}{\partial u_p'} = z_p, \; \lambda_{p+1} = z_{p+1},$$
$$\ldots, \lambda_{p+q-1} = z_{p+q-1}' \; \frac{\partial \psi}{\partial u_{p+q}'} = z_{p+q}.$$

Da in den übrigen (ausser der letzten) u_p', u_{p+q}' nicht vorkommen, so müssen also u_p', u_{p+q}', ν aus

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_p'} = z_p, \; \frac{\partial \psi}{\partial u_{p+q}'} = z_{p+q}, \; \varphi = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(d)}$$

bestimmt werden. Enthält nun φ weder u_p' noch u_{p+q}', so ist diese Bestimmung, da ν nicht in φ vorkommt, unmöglich, und damit auch die Reduktion auf die Form in §. 11, IV., womit dann natürlich auch die weiteren Folgerungen wegfallen.

Würden übrigens in den beiden ersten (d) u_p', u_{p+q}' thatsächlich nicht vorkommen (§. 12, III.), so wäre die Auflösung (d. h. Bestimmung dieser Grössen) ebenfalls unmöglich.

III. Kommt nun aber keiner der höchsten Differentialquotienten von y oder z (u_p', u_{p+q}') in φ vor, so dass also $n > r$, $m > s$ ($p = n$, $q = m$) ist, so gilt wohl Alles, was wir hinsichtlich der Bildung der (H) gesagt; die Anzahl der eintretenden willkürlichen Konstanten ist aber nicht $2(n + m)$.

Man kann sich in diesem Falle nun dadurch helfen, dass man $y^{r+1}, y^{r+2}, \cdots, y^{(n)}$ durch Differenzirung aus (b) zieht und in f einsetzt, wodurch der höchste Grad in dieser Funktion: von y der $r$te, von z der $m$te oder $s + n - r$te ist. Dann enthält ψ nur diese Grade und φ enthält einen der höchsten Differentialquotienten.

Die Anzahl der eintretenden willkürlichen Konstanten ist $2(r + m)$ oder $2(r + s + n - r) = 2(s + n)$, und zwar ist die grössere dieser Zahlen zu wählen.

Man kann aber auch eben so $z^{(s+1)}, \ldots, z^{(m)}$ wegschaffen und dann ist der höchste Grad in ψ: von z der $s$te, von y der $n$te oder

$r + m$ — ste. Die Zahl der eintretenden Konstanten ist $2(n+s)$ oder $2(r+m-s+s) = 2(r+m)$, und zwar ist die grössere dieser Zahlen zu wählen.

Es ist selbstverständlich, dass die Verbindung der (H) und (b) in beiden Fällen dasselbe geben muss.

IV. Man kann hiernach allgemein aussprechen:

Ist bei dem vorgelegten Probleme nach den Vorschriften in II. verfahren worden, d. h. hat man die (H) und (b) zur Bestimmung von y, z benutzt, so ist die Anzahl der durch Integration eintretenden willkürlichen Konstanten die grösste der Zahlen

$$2(n+s), \quad 2(r+m), \quad 2(r+s).$$

V. Wir heben nur noch besonders den Fall heraus, da φ keinen Differentialquotienten enthält. Da jetzt r und s Null sind, so ist die Anzahl der eintretenden Konstanten die grössere der zwei Zahlen $2n$, $2m$.

Die (H) heissen

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots \pm \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} + \cdots \pm \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}} = 0,$$

woraus sofort:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots \pm \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} + \cdots \pm \frac{d^m}{dx^m}\frac{\partial f}{\partial z^{(m)}}\right]\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad . \; . \; . \quad \text{(K)}$$

als Gleichung folgt, die mit

$$\varphi = 0$$

zu verbinden ist.

Dies mag für die Betrachtung der Einzelfälle genügen.

Vierter Abschnitt.

Entscheidung, ob Maximum oder Minimum*).

§. 14.

Feststellung der Aufgabe.

I. Wir knüpfen einfach an die Untersuchungen des §. 11 an, da sie ganz allgemein sind, und wir werden setzen

$$\Phi = F + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

ferner das Integral

$$\int_a^b \Phi dx = J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

zu einem M. M. machen, indem wir $u_1, \ldots, u_n$ aus den dortigen (B') bestimmen; nöthigenfalls werden wir auch nach §. 11, V. verfahren, und dann sollen dieselben Zeichen auch dieselbe Sache bezeichnen. Sonach werden, wenn wir dies benutzen, z, W, Ψ, V, b, β die ihnen in §. 11, V. zukommende Bedeutung haben.

Wenn wir statt des Integrals (a) in §. 11 das obige J betrachten, so macht dies, da wir immer die Bedingungsgleichungen (b) a. a. O. beachten, offenbar keinen Unterschied, ist aber für unsere Untersuchung bequemer.

Es ist (§. 11, II.)

$$\delta J = \int_a^b (\Psi_1 \delta u_1 + \cdots + \Psi_n \delta u_n) \, dx = \int_a^b \delta \Phi d x,$$

---

*) Man vergleiche die zwei wichtigen Abhandlungen von Clebsch im 55. und 56. Bande des Crelle'schen Journals.

wobei das Zeichen δ eine Differenzirung nach ε und nachheriges Einsetzen von Null für ε bezeichnet (§. 3). Dabei ist zu beachten, dass nur unter der Voraussetzung fester Grenzwerthe alle diese drei Ausdrücke gleich sind.

Daraus folgt dann

$$\delta^2 J = \int_a^b \delta^2 \Phi\, dx = \int_a^b [\delta \Psi_1 \delta u_1 + \cdots + \delta \Psi_n \delta u_n + \Psi_1 \delta^2 u_1 + \cdots + \Psi_n \delta^2 u_n]\, dx.$$

Da man aber hier die gefundenen Werthe der u einsetzen soll, so ist wegen der (B) in §. 11, II.:

$$\delta^2 J = \int_a^b (\delta \Psi_1 \delta u_1 + \cdots + \delta \Psi_n \delta u_n)\, dx.$$

Dies kommt ganz offenbar darauf hinaus, dass man die zweiten Variationen der u ($\delta^2 u_1, \ldots, \delta^2 u_n$) vernachlässigen darf. Dies beachtet, ist es uns bequemer

$$\delta^2 J = \int_a^b \delta^2 \Phi\, dx$$

zu *setzen* (wo also in $\delta^2 \Phi$ jedenfalls die zweiten Variationen der u wegfallen*). Hierbei ist

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \delta u_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} \delta u_n + \frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} \delta u_1' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n'} \delta u_n';$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 \Phi = {} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1^2} \delta u_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n^2} \delta u_n^2 \\
& + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_{n-1} \partial u_n} \delta u_{n-1} \delta u_n \right) \\
& + 2 \delta u_1' \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_1'} \delta u_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n \partial u_1'} \delta u_n \right) \\
& \vdots \\
& + 2 \delta u_n' \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_n'} \delta u_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n \partial u_n'} \delta u_n \right) \\
& + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1'^2} \delta u_1'^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n'^2} \\
& + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1' \partial u_2'} \delta u_1' \delta u_2' + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_{n-1}' \partial u_{n-2}'} \delta u_{n-1}' \delta u_n' \right).
\end{aligned}$$

*) Dabei ist immerhin zu beachten, dass $\delta^2 \Phi$ und $\delta \Psi_1 \delta u_1 + \ldots + \delta \Psi_n \delta u_n$ noch nicht identisch sind, wenn man auch $\delta^2 u$ weglässt. Allein die Glieder, um welche sie verschieden sind, fallen — bei festen Grenzwerthen — Null aus.

In symbolischer Form:

$$\delta\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial u_n}\delta u_n + \frac{\partial}{\partial u_1'}\delta u_1' + \cdots + \frac{\partial}{\partial u_n'}\delta u_n'\right)\Phi,$$

$$\delta^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial u_n}\delta u_n + \frac{\partial}{\partial u_1'}\delta u_1' + \cdots + \frac{\partial}{\partial u_n'}\delta u_n'\right)^2\Phi.$$

II. Setzen wir für künftig, nachdem man die gefundenen Werthe der u eingesetzt:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_r^2} = a_{r,r}, \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_r\,\partial u_s} = a_{r,s}, \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_r\,\partial u_s'} = b_{r,s}, \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_r'\,\partial u_s'} = c_{r,s} \\ \qquad \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial u_s} = p_{m,s}, \quad \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial u_s'} = q_{m,s}\end{array}\right\} \text{(c)}$$

und

$$\begin{aligned} 2\Upsilon = {} & a_{1,1}\,y_1^2 + a_{2,2}\,y_2^2 + \cdots + a_{n,n}\,y_n^2 \\ & + 2\,(a_{1,2}\,y_1\,y_2 + a_{1,3}\,y_1\,y_3 + \ldots + a_{1,n}\,y_1\,y_n \\ & \qquad + a_{2,3}\,y_2\,y_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}\,y_2\,y_n \\ & \qquad + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1,n}\,y_{n-1}y_n) \\ & \qquad \vdots \\ & + 2\,y_1'\,(b_{1,1}\,y_1 + \cdots + b_{n,1}\,y_n) \\ & + 2\,y_2'\,(b_{1,2}\,y_1 + \cdots + b_{n,2}\,y_n) \\ & \quad \vdots \\ & + 2\,y_n'\,(b_{1,n}\,y_1 + \cdots + b_{n,n}\,y_n) \\ & + c_{1,1}\,(y_1')^2 + c_{2,2}\,(y_2')^2 + \cdots + c_{n,n}\,(y_n')^2 \\ & + 2\,(c_{1,2}\,y_1'\,y_2' + c_{1,3}\,y_1'\,y_3' + \cdots + c_{1,n}\,y_1'\,y_n' \\ & \qquad + c_{2,3}\,y_2'\,y_3' + \cdots\cdots + c_{2,n}\,y_2'\,y_n' \\ & \qquad + \cdots\cdots\cdots + c_{n-1,n}\,y_{n-1}'\,y_n') \\ & + 2\,z_1\,(p_{1,1}\,y_1 + p_{1,2}\,y_2 + \cdots + p_{1,n}\,y_n \\ & \qquad\qquad + q_{1,1}\,y_1' + q_{1,2}\,y_2' + \cdots + q_{1,n}\,y_n') \\ & + 2\,z_2\,(p_{2,1}\,y_1 + p_{2,2}\,y_2 + \cdots + p_{2,n}\,y_n \\ & \qquad\qquad + q_{2,1}\,y_1' + q_{2,2}\,y_2' + \cdots + q_{2,n}\,y_n') \\ & \quad \vdots \\ & + 2\,z_r\,(p_{r,1}\,y_1 + p_{r,2}\,y_2 + \cdots + p_{r,n}\,y_n \\ & \qquad\qquad + q_{r,1}\,y_1' + q_{r,2}\,y_2' + \cdots + q_{r,n}\,y_n') \end{aligned}$$

wo nun y, z keinerlei Beziehung zu früheren Zeichen haben sollen, dabei aber immerhin als Funktionen von x gedacht werden und $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $z' = \dfrac{dz}{dx}$ ist.

Der Werth von $\delta^2 \Phi$ ist dann obiger Werth von $2\,T$, wenn man darin δu für y und $z = 0$ setzt.

Haben wir nöthig, für y, z andere Grössen zu setzen, so wollen wir $T(y, z)$ statt T setzen. Darnach wäre

$$\delta^2 \Phi = 2\,T(\delta u, 0).$$

Die Integration der Gleichungen (B′) des §. 11 führt, wenn wir den allgemeinen Fall im Auge behalten, $2n$ willkürliche Konstanten ein, die im Folgenden durch

$$h_1, h_2, \ldots, h_{2n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

bezeichnet sein sollen (die b, β in §. 11, V., wenn man nach der dortigen Weise verfährt). Wir dürfen also die u als Funktionen von x und den h ansehen.

Nun werden wir T ganz vorzugsweise für den Fall zu betrachten haben, da

$$y_s = \frac{\partial u_s}{\partial h}, \quad z_s = \frac{\partial \lambda_s}{\partial h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

und unter dieser Annahme soll T durch Θ bezeichnet sein, so dass

$$\Theta = T\left(\frac{\partial u}{\partial h}, \frac{\partial \lambda}{\partial h}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e')$$

Dabei ist h irgend eine der Konstanten (d). Sollte es nöthig werden, eine besonders hervorzuheben, so werden wir einen Zeiger an Θ setzen, so dass also

$$\Theta_1 = T\left(\frac{\partial u}{\partial h_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial h_1}\right), \ldots, \ \Theta_{2n} = T\left(\frac{\partial u}{\partial h_{2n}}, \frac{\partial \lambda}{\partial h_{2n}}\right).$$

Dabei ist natürlich n die Anzahl der u, dagegen r die der λ (§. 11).

Differentialgleichungen für die Θ.

III. Die Gleichungen (B′) des §. 11, IV. sind identisch erfüllt, wenn man für die u und λ die durch Integration gefundenen Werthe einsetzt. Denkt man dies gethan, so kann man dann jede dieser Gleichungen etwa nach jeder der Konstanten (d) differenziren.

Dadurch wird die

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_s} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u_s'} = 0$$

geben:

$$a_{s,1}\frac{\partial u_1}{\partial h}+\cdots+a_{s,n}\frac{\partial u_n}{\partial h}+b_{s,1}\frac{\partial u_1'}{\partial h}+\cdots+b_{s,n}\frac{\partial u_n'}{\partial h}$$
$$+p_{1,s}\frac{\partial \lambda_1}{\partial h}+\cdots+p_{r,s}\frac{\partial \lambda_r}{\partial h}-\frac{d}{dx}\Big[b_{1,s}\frac{\partial u_1}{\partial h}+\cdots+b_{n,s}\frac{\partial u_n}{\partial h}$$
$$+c_{s,1}\frac{\partial u_1'}{\partial h}+\cdots+c_{s,n}\frac{\partial u_n'}{\partial h}+q_{1,s}\frac{\partial \lambda_1}{\partial h}+\cdots+q_{r,s}\frac{\partial \lambda_r}{\partial h}\Big]\text{*)}$$

d. h. wenn wir die Bezeichnung in II. beachten:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y_s}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \Theta}{\partial y_s'}=0,$$

wo zur Abkürzung $y=\frac{\partial u}{\partial h}$ gesetzt ist. Da $s=1;\,2,\ldots,n$ sein kann, so ist also

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \Theta}{\partial y_1'}=0,\ldots,\frac{\partial \Theta}{\partial y_n}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \Theta}{\partial y_n'}=0,\quad . \ . \ (f)$$

oder wenn man etwas weitläufigere Bezeichnung braucht:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial h}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial u_1'}{\partial h}}=0,\ldots,\frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial u_n}{\partial h}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial u_n'}{\partial h}}=0\quad . \ . \ (f')$$

Die erste Bezeichnung hat die Abkürzung (e) zur Voraussetzung.

Aus den (b) in §. 11, I. (die ebenfalls identisch erfüllt sein müssen) folgt:

$$p_{m,1}\frac{\partial u_1}{\partial h}+\cdots+p_{m,n}\frac{\partial u_n}{\partial h}+q_{m,1}\frac{\partial u_1'}{\partial h}+\cdots+q_{m,n}\frac{\partial u_n'}{\partial h}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z_n}=0,\quad z=\frac{\partial \lambda}{\partial h}.$$

Demnach:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z_1}=0,\ldots,\frac{\partial \Theta}{\partial z_r}=0,\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (g)$$

oder in weitläufigerer Bezeichnung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial h}}=0,\ldots,\frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial \lambda_r}{\partial h}}=0\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (g')$$

---

*) Da $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_s \partial \lambda_1}=\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\Big[\frac{\partial F}{\partial u_s}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s}+\cdots+\lambda_r\frac{\partial \varphi_r}{\partial u_s}\Big]=\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s}=p_{1,s};$
$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_s' \partial \lambda_1}=q_{1,s},$
während wie immer die λ als von den u unabhängig angesehen sind.

Natürlich gelten (f) und (g) für $h = h_1, \ldots, h_{2n}$, so dass man an die Θ noch die Zeiger 1 bis $2n$ anbringen kann. Wir werden die Bezeichnungen (f), (g) in der Regel brauchen, da Θ statt Υ schon an die wirkliche Bedeutung erinnert.

IV. Lassen wir in den (f) und (g) die Zeichen y, z (mit den angegebenen Bedeutungen) stehen, so sind dieselben ein System von $n + r$ gleichzeitigen Differentialgleichungen zwischen den $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_r$ und x. (Dabei beachtend, dass die a, b, c, p, q Funktionen von x sind.)

Denselben wird natürlich genügt für

$$y = \frac{\partial u}{\partial h}, \quad z = \frac{\partial \lambda}{\partial h}.$$

Da aber

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y_s}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y_s'}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z_s}$$

lineare Funktionen der y, z sind, wie dies sofort aus II. hervorgeht, so genügt man den (f) und (g) auch noch, wenn man

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 \frac{\partial u}{\partial h_1} + C_2 \frac{\partial u}{\partial h_2} + \cdots + C_{2n} \frac{\partial u}{\partial h_{2n}} \\ z &= C_1 \frac{\partial \lambda}{\partial h_1} + C_2 \frac{\partial \lambda}{\partial h_2} + \cdots + C_{2n} \frac{\partial h}{\partial h_{2n}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(h)}$$

setzt, wo $C_1, \ldots, C_{2n}$ willkürliche Konstanten sind. Dabei sind die y der Anzahl nach n, die z der Anzahl nach r, und also

$$y_s = C_1 \frac{\partial u_s}{\partial h_1} + \cdots + C_{2n} \frac{\partial u_s}{\partial h_{2n}}, \quad z_s = C_1 \frac{\partial \lambda_s}{\partial h_1} + \cdots + C_{2n} \frac{\partial \lambda_s}{\partial h_{2n}} \quad \text{(h')}$$

Das System der $n + r$ gleichzeitigen Gleichungen (h) kann als das allgemeine Integralsystem der (f) und (g) angesehen werden*).

Wir wollen nun endlich in Υ die Grössen y und z durch die Werthe (h) ersetzen [wo $C_1, \ldots, C_{2n}$ dieselben Konstanten bleiben, was auch in (h') der Zeiger s sei], und unter dieser Annahme Υ durch Γ bezeichnen, so dass also

$$\Gamma = \Upsilon \left(C_1 \frac{\partial u}{\partial h_1} + \cdots + C_{2n} \frac{\partial u}{\partial h_{2n}}, \; C_1 \frac{\partial \lambda}{\partial h_1} + \cdots + C_{2n} \frac{\partial \lambda}{\partial h_{2n}} \right) \quad \text{(i)}$$

---

*) Die (f) und (g) sind der Art nach wie die (B') in §. 11 beschaffen, wenn man in letzteren u durch y, λ durch z ersetzt denkt, da die Ordnungen der Differenzirungen gleich hoch sind. Desshalb enthalten die Integrale der (f) und (g) ebenfalls $2n$ willkürliche Konstanten.

wo nun allerdings an Γ keine Zeiger mehr nöthig sind, wie an Θ. Wegen der (f) und (g) ist

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial \Gamma}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \Gamma}{\partial y_1'}=0,\ldots,\frac{\partial \Gamma}{\partial y_n}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \Gamma}{\partial y_n'}=0,\\ \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1}=0,\ldots,\frac{\partial \Gamma}{\partial z_r}=0,\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (k)$$

wo y, z durch (h) oder (h′) erklärt sind (u, λ die Werthe in §. 11).

Wir werden im Folgenden unter y, z immer die Grössen (h′) verstehen, und auch Γ wird die Bedeutung (i) behalten. Dabei fällt natürlich Γ mit Υ zusammen, wenn man die Zeichen y, z in ersterer Grösse einführt.

Die Konstanten C sind willkürlich. Wählt man dieses oder jenes System solcher Konstanten, so nehmen y und z in (h′) andere Werthe an, und wir werden uns zunächst mit den Eigenschaften solcher verschiedenen Werthe beschäftigen.

§. 15.

Grundeigenschaft der Werthsysteme der y, z.

I. Legen wir den Konstanten C in (h′) bestimmte Werthe bei, dann zweitens andere Werthe, so erhalten wir dadurch zweierlei Systeme von Einzelwerthen derselben. Damit ergeben sich dann auch zweierlei Systeme der Werthe von y, z. Wir bezeichnen dieselben durch

$$\left.\begin{array}{l} y_{1,\alpha},\ y_{2,\alpha},\ldots,\ y_{n,\alpha},\ z_{1,\alpha},\ z_{2,\alpha},\ldots,\ z_{r,\alpha};\\ y_{1,\beta},\ y_{2,\beta},\ldots,\ y_{n,\beta},\ z_{1,\beta},\ z_{2,\beta},\ldots,\ z_{r,\beta},\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (a)$$

wo durch die zwei an y, z angehängten Zeiger wohl eine Verwirrung nicht entstehen kann, indem der erste Zeiger die seitherige Bedeutung hat, der zweite meint, man habe ein bestimmtes System von Werthen der C gewählt.

Setzt man in Γ das eine oder das andere System der y, z, so wollen wir auch hier die Zeiger α, β anhängen.

Aus der Form von Υ, d. h. Γ, ist sofort klar, dass die Grösse

$$y_{1,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y_{1,\beta}}+\cdots+y_{n,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y_{n,\beta}}+y'_{1,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{1,\beta}}+\cdots+y'_{n,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{n,\beta}}$$
$$+z_{1,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial z_{1,\beta}}+\cdots+z_{r,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial z_{r,\beta}}$$

denselben Werth behält, wenn man die Zeiger α und β vertauscht.

Wegen der r letzten Gleichungen (k) fallen die letzten Glieder weg; wegen der n ersten (k) sind die übrigen:

$$\frac{d}{dx}\left[y_{1,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{1,\beta}}+\cdots+y_{n,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{n,\beta}}\right],$$

so dass also

$$\frac{d}{dx}\left[y_{1,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{1,\beta}}+\cdots+y_{n,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{n,\beta}}\right]$$
$$=\frac{d}{dx}\left[y_{1,\beta}\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{1,\alpha}}+\cdots+y_{n,\beta}\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{n,\alpha}}\right],$$

und folglich

$$y_{1,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{1,\beta}}+\cdots+y_{n,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{n,\beta}}$$
$$-\left(y_{1,\beta}\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{1,\alpha}}+\cdots+y_{n,\beta}\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{n,\alpha}}\right)=E\quad . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

wo E eine Konstante (nach x) ist. Diese Gleichung drückt die gesuchte Grundeigenschaft aus.

Wir betrachten nun n einzelne Systeme der Werthe $C_1, \ldots, C_{2n}$, so dass also α, β in (b) nur die Werthe $1, 2, \ldots, n$ haben. Natürlich ist für $\alpha = \beta$ die zweite Seite der (b) Null. Dass wir gerade n solcher Systeme herausnehmen, ist eine Sache des Beliebens; die Anzahl aller Konstanten ist dann $2n^2$.

Was die Konstante E betrifft, so hängt sie natürlich mit den C zusammen. Legt man ihr einen bestimmten Werth, etwa Null, bei, so hat man dadurch eine bestimmte Beziehung zwischen den $4n$ in (b) eingehenden Konstanten festgestellt.

Besondere Systeme, für die $E = 0$.

II. Wir wollen n einzelne Systeme der $C_1, \ldots, C_{2n}$ uns denken (α die Werthe $1, \ldots, n$ beilegen), sodann n^2 Grössen

$$w_{r,s}\,(r = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, n)$$

so bestimmen, dass

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{1,\alpha}} &= w_{1,1}\,y_{1,\alpha}+w_{1,2}\,y_{2,\alpha}+\cdots+w_{1,n}\,y_{n,\alpha},\\
\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{2,\alpha}} &= w_{2,1}\,y_{1,\alpha}+w_{2,2}\,y_{2,\alpha}+\cdots+w_{2,n}\,y_{n,\alpha},\\
&\vdots\\
\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{n,\alpha}} &= w_{n,1}\,y_{1,\alpha}+w_{n,2}\,y_{2,\alpha}+\cdots+w_{n,n}\,y_{n,\alpha},
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \quad \text{(c)}$$

so liegt ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$), da die Anzahl dieser Gleichungen auch

n^2 ist, dem kein Hinderniss im Wege. Natürlich ist die (b) immer für alle Systeme erfüllt.

Gesetzt nun aber, die in (c) verwendeten n Systeme sollen die Eigenschaft haben, dass je die Konstante E in (b) Null wird (wenn man zwei dieser Systeme benutzt). Setzt man die (c) in (b) ein, so ist etwa

$$y_{1,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{1,\beta}} + \cdots + y_{n,\alpha}\frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial y'_{n,\beta}}$$
$$= y_{1,\alpha}(w_{1,1}\,y_{1,\beta} + \cdots + w_{1,n}\,y_{n,\beta}) + \cdots$$
$$+ y_{n,\alpha}(w_{n,1}\,y_{1,\beta} + \cdots + w_{n,n}\,y_{n,\beta}),$$

in welcher Grösse sich das allgemeine Glied als

$$w_{r,s}\,y_{r,\alpha}\,y_{s,\beta}$$

darstellen lässt, wenn man r, s alle Werthe von 1 bis n beilegt. Demnach ist die Grösse selbst

$$\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} w_{r,s}\,y_{r,\alpha}\,y_{s,\beta}.$$

Natürlich ist ebenso:

$$y_{1,\beta}\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{1,\alpha}} + \cdots = \sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} w_{r,s}\,y_{r,\beta}\,y_{s,\alpha}.$$

Soll also in (b) $E = 0$ sein, so muss

$$\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} w_{r,s}\,y_{r,\alpha}\,y_{s,\beta} = \sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} w_{r,s}\,y_{r,\beta}\,y_{s,\alpha},$$

d. h.:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} w_{r,s}(y_{r,\alpha}\,y_{s,\beta} - y_{r,\beta}\,y_{s,\alpha}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

sein. Hier bleiben nur Glieder stehen, in denen r und s verschieden sind. Zu jeder Verbindung μ, ν von r, s gehört eine andere ν, μ. Dann sind die betreffenden Glieder:

$$w_{\mu,\nu}(y_{\mu,\alpha}\,y_{\mu,\beta} - y_{\mu,\beta}\,y_{\nu,\alpha}),$$
$$w_{\nu,\mu}(y_{\nu,\alpha}\,y_{\mu,\beta} - y_{\nu,\beta}\,y_{\mu,\alpha}) = -\,w_{\nu,\mu}(y_{\mu,\alpha}\,y_{\nu,\beta} - y_{\nu,\alpha}\,y_{\mu,\beta}).$$

Daraus folgt, dass die (α) auch heisst:

$$\sum\sum(w_{r,s} - w_{s,r})(y_{r,\alpha}\,y_{s,\beta} - y_{r,\beta}\,y_{s,\alpha}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha')$$

wenn man für r, s alle Werthe von 1 bis n wählt, aber dieselbe Verbindung nicht wiederholt.

Die Gleichung (α') besteht hiernach aus $\dfrac{n(n-1)}{1.2}$ Gliedern.

Solcher Gleichungen aber wie (α') giebt es, wenn man die Zahlen α, β alle Werthe von 1 bis n durchlaufen lässt, und gleiche Werthe, so wie schon da gewesene Verbindungen ausschliesst, ebenfalls $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Bei der eigenthümlichen Form, da nämlich die zweiten Seiten Null sind, und die ersten in allen Gliedern dieselben Factoren $w_{r,s} - w_{s,r}$ haben, folgt sofort, dass

$$w_{r,s} = w_{s,r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c')$$

sein wird.

Wenn also die in (c) gewählten Systeme derart sind, dass in (b) $E = 0$ ist, wenn man je zwei dieser Systeme einsetzt, so findet nothwendig die (c') statt.

Umgekehrt geht aber aus unserer Darstellung wohl auch sofort hervor, dass wenn die w der Bedingung (c') genügen, durch die (c) auch die (b) mit $E = 0$ erfüllt ist (wie man sich nöthigenfalls durch unmittelbares Einsetzen überzeugen könnte).

Andere Beziehungen für die w.

III. Aus den (k) in §. 14, IV. folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y_{1,\alpha}} &= \frac{dw_{1,1}}{dx} y_{1,\alpha} + \cdots + \frac{dw_{1,n}}{dx} y_{n,\alpha} + w_{1,1} y'_{1,\alpha} + \cdots + w_{s,n} y'_{n,\alpha} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y_{n,\alpha}} &= \frac{dw_{n,1}}{dx} y_{1,\alpha} + \cdots + \frac{dw_{n,n}}{dx} y_{n,\alpha} + w_{n,1} y'_{1,\alpha} + \cdots + w_{n,n} y'_{n,\alpha}\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Diese Gleichungen, in Verbindung mit (c), könnten zur Bestimmung der w dienen; unterwirft man dieselben dann den Bedingungen (c'), so hat man zugleich diejenigen Systeme charakterisirt, für die $E = 0$ ist.

Elimination der y und z.

IV. Aus (c) und (d) lassen sich nun Gleichungen bilden, in denen y, z weggefallen sind. Zu dem Ende wollen wir n^2 Grössen $\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \ldots, \sigma_{n,n}$ bestimmen so, dass

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_{1,\alpha}}{dx} &= \sigma_{1,1} y_{1,\alpha} + \sigma_{1,2} y_{2,\alpha} + \cdots + \sigma_{1,n} y_{n,\alpha} \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n,\alpha}}{dx} &= \sigma_{n,1} y_{1,\alpha} + \sigma_{n,2} y_{2,\alpha} + \cdots + \sigma_{n,n} y_{n,\alpha}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (e)$$

wo natürlich y die Bedeutung in (h) des §. 14, IV. hat, und α von

1 bis n geht. Diese Bestimmung unterliegt begreiflich keinerlei Beanstandung.

Dann wollen wir nr Grössen $M_{s,m}$ bestimmen so, dass

$$\left.\begin{aligned} z_{m,1} &= M_{1,m} y_{1,1} + M_{2,m} y_{2,1} + \cdots + M_{n,m} y_{n,1}, \\ z_{m,2} &= M_{1,m} y_{1,2} + M_{2,m} y_{2,2} + \cdots + M_{n,m} y_{n,2}, \\ &\vdots \\ z_{m,n} &= M_{1,m} y_{1,n} + M_{2,m} y_{2,n} + \cdots + M_{n,m} y_{n,n}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (e')$$

wo $m = 1, 2, \ldots, r$. Natürlich unterliegt auch diese Bestimmung keinerlei Beanstandung.

V. Berücksichtigt man die Bedeutung von Γ, so heisst die s-te Gleichung (c):

$$\left.\begin{aligned} & w_{s,1}\, y_{1,\alpha} + w_{s,2}\, y_{2,\alpha} + \cdots + w_{s,n}\, y_{n,\alpha} \\ & \quad = b_{1,s}\, y_{1,\alpha} + \cdots + b_{n,s}\, y_{n,\alpha} + c_{1,s}\, y'_{1,\alpha} \\ & \quad + \cdots + c_{n,s}\, y'_{n,\alpha} + z_{1,\alpha}\, q_{1,s} + \cdots + z_{r,\alpha}\, q_{r,s}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (\gamma)$$

eben so die s-te (d):

$$\left.\begin{aligned} & \frac{d w_{s,1}}{dx} y_{1,\alpha} + \cdots + \frac{d w_{s,n}}{dx} y_{n,\alpha} + w_{s,1}\, y'_{1,\alpha} + \cdots \\ & \quad + w_{s,n}\, y'_{n,\alpha} = a_{1,s}\, y_{1,\alpha} + \cdots + a_{n,s}\, y_{n,\alpha} + b_{s,1}\, y'_{1,\alpha} \\ & \quad + \cdots + b_{s,n}\, y'_{n,\alpha} + p_{1,s}\, z_{1,\alpha} + \cdots + p_{r,s}\, z_{r,\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (\gamma')$$

Führt man die Werthe (e), (e′) ein, so nimmt (γ) die Form

$$B_{1,s} y_{1,\alpha} + \cdots + B_{n,s} y_{n,\alpha} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad . \; . \; . \; (\delta)$$

an, so dass man nun solcher Gleichungen, da auch α die Werthe $1, \ldots, n$ durchläuft, ihrer n^2 hat. Daraus folgt bei der besonderen Form (II.), dass die B Null sein müssen. (Man wird bei festem s zuerst $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ setzen und aus diesen Gleichungen schliessen: $B_{1,s} = 0, \ldots, B_{n,s} = 0$).

Beachtet man die Werthe der B, so hat man ($s = 1, 2, \ldots, n$):

$$\left.\begin{aligned} w_{s,1} &= b_{1,s} + \sigma_{1,1} c_{1,s} + \cdots + \sigma_{n,1} c_{n,s} + \sum_{m=1}^{m=r} q_{m,s} M_{1,m}, \\ &\vdots \\ w_{s,n} &= b_{n,s} + \sigma_{1,n} c_{1,s} + \cdots + \sigma_{n,n} c_{n,s} + \sum_{m=1}^{m=r} q_{m,s} M_{n,m}. \end{aligned}\right\} \quad . \; (f)$$

Ganz ebenso folgt aus (γ'):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dw_{s,1}}{dx} + w_{s,1}\,\sigma_{1,1} + \cdots + w_{s,n}\,\sigma_{n,1} &= a_{1,s} + b_{s,1}\,\sigma_{1,1} + \cdots \\ &\quad + b_{s,n}\,\sigma_{n,1} + \sum_{m=1}^{m=r} p_{m,s}\,M_{1,m}, \\ &\vdots \\ \frac{dw_{s,n}}{dx} + w_{s,1}\,\sigma_{1,n} + \cdots + w_{s,n}\,\sigma_{n,n} &= a_{n,s} + b_{s,1}\,\sigma_{1,n} + \cdots \\ &\quad + b_{s,n}\,\sigma_{n,n} + \sum_{m=1}^{m=r} p_{m,s}\,M_{n,m}.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (f')$$

VI. Die s-te der letzten Gleichungen (k) heisst:

$$p_{s,1}\,y_{1,\alpha} + \cdots + p_{s,n}\,y_{n,\alpha} + q_{s,1}\,y'_{1,\alpha} + \cdots + q_{s,n}\,y'_{n,\alpha} = 0.$$

Führt man hier die (e) ein, so nehmen diese Gleichungen abermals die in V. bereits erhaltene Form (δ) an, woraus Dasselbe geschlossen wird. Man hat folglich:

$$\left.\begin{aligned} p_{s,1} + q_{s,1}\,\sigma_{1,1} + \cdots + q_{s,n}\,\sigma_{n,1} &= 0 \\ &\vdots \\ p_{s,n} + q_{s,1}\,\sigma_{1,n} + \cdots + q_{s,n}\,\sigma_{n,n} &= 0 \end{aligned}\right\} s = 1, 2, \ldots, r \;\; . \;\; (g)$$

Aus den (f), (g), welche der Zahl nach $n^2 + nr$ sind, lassen *sich die* σ, M, welche der Zahl nach eben so viele sind, bestimmen; setzt man sie dann in (f') ein, so hat man Differentialgleichungen zur Bestimmung der w.

Von der Beziehung (c') haben wir in IV. bis VI. nicht ausdrücklich Gebrauch gemacht. Unterwerfen wir die w jener Bedingung, so werden die so erhaltenen w dann σ, M geben und man wird aus (e) die Systeme y ziehen, die $E = 0$ geben *). Doch ist diese Aufsuchung keineswegs unser Zweck.

*) Denkt man die n Systeme der y und z, welche den (k) genügen und zugleich in (b) $E = 0$ machen, bestimmt, setzt diese in (e) und (e') ein und bestimmt daraus die σ und M, so geben die (f) die w. Da die ursprüngliche Zahl der Konstanten $2n^2$ ist, durch die Bedingung, dass $E = 0$, aber $\frac{n(n-1)}{2}$ Beziehungen zwischen denselben gegeben sind, so bleiben nur noch $\frac{3n^2+n}{2}$ willkürliche Konstanten in den y übrig. So viele treten aber nicht in die w ein, da die (f') Differenzialgleichungen erster Ordnung der Zahl nach $\frac{n(n+1)}{2}$ geben, wenn man (c') berücksichtigt. Es hängt dies damit zusammen, dass bei der Auflösung der (e) und (e') die $\frac{3n^2+n}{2}$, willkürlichen Konstanten sich derart kombiniren, dass thatsächlich nur

Wir bemerken nur noch, dass wenn für einen Werth von s alle $q_{s,m}$ Null wären, die (g) auch $p_{s,m}$ Null liefern würden, was offenbar unzulässig ist. Aber es ist auch nur dann $q_{s,1} = q_{s,2} = \cdots = q_{s,n}$ Null, wenn φ_s keinen der Differentialquotienten von u enthält. Diesen Fall schliessen wir also hier nothwendig aus (§. 16, VI.).

Differentialgleichungen für die w.

VII. Es lässt sich das System der Differentialgleichungen für die w, von dem so eben die Rede war, unschwer herstellen.

Wir schreiben zu dem Ende die Gleichungen (f) in folgender Form:

$$b_{1,\mu} + \sigma_{1,1}\, c_{1,\mu} + \cdots + \sigma_{n,1}\, c_{n,\mu} + \sum q_{m,\mu}\, M_{1,m} = w_{\mu,1},$$

$$b_{n,\mu} + \sigma_{1,n}\, c_{1,\mu} + \cdots + \sigma_{n,n}\, c_{n,\mu} + \sum q_{m,\mu}\, M_{n,m} = w_{\mu,n},$$

wo $\mu = 1, 2, \ldots, n$. Die s-te dieser Gleichungen heisst:

$$b_{s,\mu} + \sigma_{1,s}\, c_{1,\mu} + \cdots + \sigma_{n,s}\, c_{n,\mu} + \sum q_{m,\mu}\, M_{s,m} = w_{\mu,s},$$

wo nun auch $s = 1, 2, \ldots, n$. Da man also hieraus das ganze System (f) erhält, wenn man s und μ alle Werthe von 1 bis n durchlaufen lässt, so folgt sofort, dass man die (f) auch schreiben kann:

$$\left.\begin{array}{l} b_{s,1} + \sigma_{1,s}\, c_{1,1} + \cdots + \sigma_{n,s}\, c_{n,1} + \sum q_{m,1}\, M_{s,n} = w_{1,s}, \\ \quad\vdots \\ b_{s,n} + \sigma_{1,s}\, c_{1,n} + \cdots + \sigma_{n,s}\, c_{n,n} + \sum q_{m,n}\, M_{s,m} = w_{n,s} \end{array}\right\} . \quad (f_1)$$

wo $s = 1, 2 \ldots, n$. Beachten wir nunmehr die (c'); multipliziren die (f_1) bezüglich mit $\sigma_{1,t}, \sigma_{2,t}, \ldots, \sigma_{n,t}$, addiren sie und subtrahiren die Summe von der t-ten der Gleichungen (f'), so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dw_{s,t}}{dx} = a_{t,s} &- (c_{1,1}\, \sigma_{1,s}\, \sigma_{1,t} + \cdots + c_{n,1}\, \sigma_{n,s}\, \sigma_{1,t}) + \sum p_{m,s}\, M_{t,m} \\ &- (c_{1,2}\, \sigma_{1,s}\, \sigma_{2,t} + \cdots + c_{n,2}\, \sigma_{n,s}\, \sigma_{2,t}) - \sigma_{1,t} \sum q_{m,1}\, M_{s,m} \\ &\quad\vdots \\ &- (c_{1,n}\, \sigma_{1,s}\, \sigma_{n,t} + \cdots + c_{n,n}\, \sigma_{n,s}\, \sigma_{n,t}) - \sigma_{n,t} \sum q_{m,n}\, M_{s,m}. \end{aligned}$$

$\frac{n\,(n+1)}{2}$ bleiben, immer natürlich unter der Voraussetzung, dass $E = 0$ sei für die benutzten Systeme. Die (e), (e'), (f), (f') mit der Bedingung (c') ersetzen die (c), (d), also die ersten (k); nimmt man die (g) dazu, so sind auch die letzten (k) ersetzt, und es ist in (b) $E = 0$.

Wegen (g) ist aber

$$\sigma_{1,t}\, q_{m,1}\, M_{s,m} + \cdots + \sigma_{n,t}\, q_{m,n}\, M_{s,m} = -\, p_{m,t}\, M_{s,m},$$

so dass

$$\frac{dw_{s,t}}{dx} = a_{s,t} - \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, \sigma_{\mu,s}\, \sigma_{\nu,t} + \sum_{m=1}^{m=r} (p_{m,s}\, M_{t,m} + p_{m,t} M_{s,m}) \quad . \text{ (h)}$$

Dies ist die gesuchte Differenzialgleichung, welche die (c′) übrigens wesentlich voraussetzt [indem sonst die zweiten Seiten in (f_1) gegen das ähnliche Glied in (f′) sich nicht aufgehoben hätten]. Dass eine Vertauschung von s und t dieselbe in sich selbst umwandelt, liegt desshalb in der Natur der Sache *).

Die (h) sind der Zahl nach $\frac{n(n+1)}{1.2}$ und führen also auch eben so viele willkürliche Konstanten ein.

§. 16.

Anwendung auf $\delta^2 J$.

I. Setzen wir z. A.

$$\delta u_s = \xi_s, \quad \delta u_t = \xi_t,$$

so wollen wir die (h) in §. 15, VII. multipliziren mit ξ_s, ξ_t, und dann die Summe aller so erhaltenen Gleichungen bilden, wenn s, t alle Werthe von 1 bis n durchlaufen.

Da bei feststehenden μ, ν:

---

*) Wir haben schon in der Note zu VI. darauf aufmerksam gemacht, dass die (e), (e′), (f), (f′) die (c), (d) nebst den ersten (k) ersetzen, und dass dann die (g) die letzten (k) auch ersetzen, während die (c′) die Grösse $E = 0$ macht. Daraus folgt, dass wenn man die w aus (h) bestimmt mit den eintretenden $\frac{n(n+1)}{2}$ willkürlichen Konstanten, dann aus (f) und (g) die σ, M bestimmt (mit eben diesen Konstanten) und in (e), (e′) einsetzt, man die n Systeme von Werthen der y und z erhält, welche den (k) genügen und $E = 0$ machen. Die (e) sind dann n Systeme von je n Differenzialgleichungen erster Ordnung, die folglich noch n^2 Konstanten einführen. Demnach sind die n Systeme der Werthe y, z mit $n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2 + n}{2}$ willkürlichen Konstanten versehen, wie wir dies bereits in der Note zu VI. als nothwendig erkannten.

Wie aber schon in VI. bemerkt, ist die Bestimmung der n Systeme der y, z, welche in (b) $E = 0$ machen, keineswegs unsere Absicht.

$$\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}\sigma_{\mu,s}\,\sigma_{\nu,t}\,\xi_s\xi_t=(\sigma_{\mu,1}\,\xi_1+\cdots+\sigma_{\mu,n}\,\xi_n)\,(\sigma_{\nu,1}\,\xi_1+\cdots+\sigma_{\nu,n}\,\xi_n),$$

und bei feststehendem m:

$$\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}\xi_s\xi_t\,(p_{m,s}\,M_{t,m}+p_{m,t}\,M_{s,m})$$
$$=2\,(p_{m,1}\,\xi_1+\cdots+p_{m,n}\,\xi_n)\,(M_{1,m}\,\xi_1+\cdots+M_{n,m}\,\xi_n);$$

so ergiebt sich:

$$\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}a_{s,t}\,\xi_s\xi_t$$
$$-\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}c_{\mu,\nu}\,(\sigma_{\mu,1}\,\xi_1+\cdots+\sigma_{\mu,n}\xi_n)\,(\sigma_{\nu,1}\,\xi_1+\cdots+\sigma_{\nu,n}\,\xi_n)$$
$$+2\sum_{m=1}^{m=r}(p_{m,1}\,\xi_1+\cdots+p_{m,n}\,\xi_n)\,(M_{1,m}\,\xi_1+\cdots+M_{n,m}\,\xi_n)$$
$$=\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}\xi_s\xi_t\,\frac{dw_{s,t}}{dx}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(a)}$$

Die (f) in §. 15 multipliziren wir mit $2\,\xi_1\,\frac{d\xi_s}{dx},\ldots,2\,\xi_n\,\frac{d\xi_s}{dx}$ und addiren:

$$2\frac{d\xi_s}{dx}\,(b_{1,s}\,\xi_1+\cdots+b_{n,s}\,\xi_n)+2\,\xi_1\,\frac{d\xi_s}{dx}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sigma_{\mu,1}c_{\mu,s}+\cdots$$
$$+2\,\xi_n\frac{d\xi_s}{dx}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sigma_{\mu,n}\,c_{\mu,s}+2\sum_{m=1}^{m=r}(\xi_1\,q_{m,s}\,M_{1,m}+\cdots$$
$$+q_{m,s}\,\xi_n M_{n,m})\frac{d\xi_s}{dx}=2\,\frac{d\xi_s}{dx}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}w_{s,\mu}\,\xi_\mu.$$

Hier setzen wir $s=1,2,\ldots,n$ und addiren nochmals; dabei beachten wir, dass $(c_{s,t}=c_{t,s})$

$$2\,\xi_1\sum_{s=1}^{s=n}\frac{d\xi_s}{dx}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}c_{\mu,s}\,\sigma_{\mu,1}=\xi_1\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}\left(\sigma_{t,1}\,\frac{d\xi_s}{dx}+\sigma_{s,1}\,\frac{d\xi_t}{dx}\right)c_{s,t},$$

und erhalten:

$$2\sum_{s=1}^{s=n}\frac{d\xi_s}{dx}(b_{1,s}\xi_1+\cdots+b_{n,s}\xi_n)$$

$$+\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}c_{s,t}\left[\frac{d\xi_s}{dx}(\xi_1\sigma_{t,1}+\xi_2\sigma_{t,2}+\cdots+\xi_n\sigma_{t,n})\right.$$

$$\left.+\frac{d\xi_t}{dx}(\xi_1\sigma_{s,1}+\cdots+\xi_n\sigma_{s,n})\right]$$

$$+2\sum_{m=1}^{m=r}(M_{1,m}\xi_1+\cdots+M_{n,m}\xi_n)\left(q_{m,1}\frac{d\xi_1}{dx}+\cdots+q_{m,n}\frac{d\xi_n}{dx}\right)$$

$$=2\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}w_{s,t}\,\xi_t\frac{d\xi_s}{dx}\quad\ldots\ldots\ldots\quad\text{(b)}$$

Dabei ist selbstverständlich

$$\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}c_{s,t}\frac{d\xi_s}{dx}\frac{d\xi_t}{dx}-\sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n}c_{s,t}\frac{d\xi_s}{dx}\frac{d\xi_t}{dx}=0\quad\ldots\quad\text{(c)}$$

Addirt man (a), (b), (c), so erhält man, wenn die Doppelsumme $\sum\sum$ sich auf s und t von 1 bis n, und die einfache Summe, die wir durch S bezeichnen wollen, sich auf m von 1 bis r bezieht:

$$\sum\sum a_{s,t}\xi_s\xi_t+2\sum\sum b_{t,s}\xi_t\frac{d\xi_s}{dx}+\sum\sum c_{s,t}\frac{d\xi_s}{dx}\frac{d\xi_t}{dx}$$

$$+\sum\sum c_{s,t}\left[\frac{d\xi_s}{dx}(\xi_1\sigma_{t,1}+\cdots+\xi_n\sigma_{t,n})+\frac{d\xi_t}{dx}(\xi_1\sigma_{s,1}+\cdots+\xi_n\sigma_{s,n})\right.$$

$$\left.-(\sigma_{s,1}\xi_1+\cdots+\sigma_{s,n}\xi_n)(\sigma_{t,s}\xi_1+\cdots+\sigma_{t,n}\xi_n)-\frac{d\xi_s}{dx}\frac{d\xi_t}{dx}\right]$$

$$+2S\left(p_{m,1}\xi_1+\cdots+p_{m,n}\xi_n+q_{m,1}\frac{d\xi_1}{dx}+\cdots\right.$$

$$\left.+q_{m,n}\frac{d\xi_n}{dx}\right)(M_{1,m}\xi_1+\cdots+M_{n,m}\xi_n)=2\sum\sum w_{s,t}\,\xi_t\frac{d\xi_s}{dt}$$

$$+\sum\sum\xi_s\xi_t\frac{dw_{s,t}}{dx},$$

d. h.

$$\sum\sum a_{s,t}\,\xi_s\xi_t + 2\sum\sum b_{t,s}\,\xi_t\frac{d\xi_s}{dx} + \sum\sum c_{s,t}\frac{d\xi_s}{dx}\frac{d\xi_t}{dx}$$

$$-\sum\sum c_{s,t}\left[\frac{d\xi_s}{dx}-(\xi_1\sigma_{s,1}+\cdots+\xi_n\sigma_{s,n})\right]\left[\frac{d\xi_t}{dx}-(\xi_1\sigma_{t,1}+\cdots\right.$$

$$\left.+\,\xi_n\sigma_{t,n})\right] + 2\,S\left(p_{m,1}\xi_1+\cdots+q_{m,n}\frac{d\xi_n}{dx}\right)(M_{1,m}\xi_1+\cdots$$

$$+\,M_{n,m}\xi_n) = \frac{d}{dx}\sum\sum w_{s,t}\,\xi_s\xi_t \quad . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

wenn man darauf achtet, dass $w_{s,t} = w_{t,s}$, also

$$2\sum\sum w_{s,t}\,\xi_t\frac{d\xi_s}{dt} = \sum\sum w_{s,t}\,\xi_t\frac{d\xi_s}{dt} + \sum\sum w_{t,s}\,\xi_s\frac{d\xi_t}{dt}.$$

II. Setzen wir nunmehr

$$\varDelta_\mu = \frac{d\xi_\mu}{dx} - (\xi_1\sigma_{\mu,1}+\cdots+\xi_n\sigma_{\mu,n}),$$

d. h.

$$\varDelta_\mu = \delta u'_\mu - (\sigma_{\mu,1}\delta u_1+\cdots+\sigma_{\mu,n}\delta u_n). \; . \; . \; (e)$$

so ist, weil (§. 14, II.)

$$\delta^2\Phi = \sum\sum a_{s,t}\,\xi_s\xi_t + \sum\sum c_{s,t}\frac{d\xi_s}{dt}\frac{d\xi_t}{dt} + 2\sum\sum b_{t,s}\,\xi_t\frac{d\xi_s}{dx}:$$

$$\delta^2\Phi = \frac{d}{dx}\sum\sum w_{s,t}\,\xi_s\xi_t + \sum\sum c_{s,t}\,\varDelta_s\varDelta_t$$

$$-\,2\,S\left(p_{m,1}\xi_1+\cdots+q_{m,n}\frac{d\xi_n}{dx}\right)(M_{1,m}\xi_1+\cdots+M_{n,m}\xi_n).$$

Die Variationen δu, $\delta u'$ müssen aber den Gleichungen

$$p_{m,1}\delta u_1+\cdots+p_{m,n}\delta u_n+q_{m,1}\delta u'_1+\cdots+q_{m,n}\delta u'_n = 0 \; . \; . \; (f)$$

genügen, wo $m = 1, \ldots, r$, da diese Gleichungen aus den (b) in §. 11, I. folgen.

Beachtet man dies, so ist

$$\delta^2\Phi = \frac{d}{dx}\sum\sum w_{s,t}\,\xi_s\xi_t + \sum\sum \varDelta_s\varDelta_t c_{s,t} \quad . \; . \; . \; (g)$$

Hieraus folgt, da für $x = a$ und b die ξ Null sind (§. 10, I.), nach §. 14, I. endlich*)

$$\delta^2 J = \int_a^b \sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n} c_{s,t}\,\varDelta_s\varDelta_t\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; (L)$$

---

*) $w_{s,t}\,\xi_s\xi_t$ fällt jedoch nur weg, wenn $w_{s,t}$ nicht unendlich wird.

Die in Δ vorkommenden Variationen δu, $\delta u'$ müssen übrigens den (f), der Zahl nach r, noch genügen. Diese Gleichungen lassen sich aber leicht in Beziehungen zwischen den Δ umsetzen.

Zieht man nämlich aus den (g) in §. 15, VI.: $p_{s,1}, \ldots, p_{s,n}$ und setzt diese Werthe (m für s) in (f), so ergiebt sich:

$$q_{m,1}[\delta u'_1 - (\sigma_{1,1}\delta u_1 + \cdots + \sigma_{1,n}\delta u_n)] + \cdots$$
$$+ q_{m,n}[\delta u'_n - (\sigma_{n,1}\delta u_1 + \cdots + \sigma_{n,n}\delta u_n)] = 0,$$

d. h.

$$q_{m,1}\Delta_1 + \cdots + q_{m,n}\Delta_n = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, r \quad . \; . \; (e')$$

Diese r Gleichungen ersetzen die (f). Lässt man also zwischen den n Grössen Δ die r Gleichungen (e') bestehen, vermittelst deren sich r durch die übrigen $n - r$ ausdrücken lassen, so bleiben diese $n - r$ ganz willkürlich*).

Endergebniss.

III. Das Ergebniss unserer ziemlich weitläufigen Untersuchung lässt sich nun einfach dahin fassen.

Um zu entscheiden, ob J für die nach §. 11 gefundenen Werthe von u (und λ) ein Maximum oder ein Minimum sei, bilde man *die Grösse*

$$\delta^2 J = \int_a^b \sum_{s=1}^{s=n}\sum_{t=1}^{t=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_s' \partial u_t'} P_s P_t dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (M)$$

in der die P noch durch r Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u'_1} P_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u'_2} P_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u'_n} P_n = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u'_1} P_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u'_2} P_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u'_n} P_n = 0, \\ \vdots \qquad\qquad \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial u'_1} P_1 + \frac{\partial \varphi_r}{\partial u'_2} P_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial u'_n} P_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (M')$$

zusammenhängen; drücke r der P durch die übrigen aus und setze dieselben in (M) ein, wo zugleich für die u die gefundenen Werthe eintreten.

---

*) Wegen der (f) sind r der Variationen durch die übrigen $n - r$ ausdrückbar. Diese letzteren bleiben willkürlich. Statt der Variationen δu sind die Δ eingeführt, die natürlich ganz eben so willkürlich sind, nur bestehen die (e') zwischen ihnen.

Alsdann muss innerhalb der Grenzen der Integration der Ausdruck unter dem Integralzeichen in (M) immer dasselbe Zeichen haben, und wenn dieses positiv ist, so hat man ein Minimum; wenn es negativ ist, dagegen ein Maximum.

Die (bleibenden $n - r$) P sind ganz beliebige Grössen.

IV. Doch liegt unsere ganze Arbeit noch unter einer wesentlichen Bedingung, der nämlich, dass auch alle unsere Rechnung nur endliche, bestimmte Grössen liefert. Da es sich in (L) nur um Δ, was wir in III. durch P bezeichneten, handelt, dazu aber nur die σ nöthig sind, so müssen diese sich so bestimmen lassen, dass sie innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich werden.

Die σ (nebst den M) bestimmen sich aus den (f) und (g) in §. 15, V., VI. und zwar ausser bekannten Grössen durch die w. Daraus folgt, dass der allen σ gemeinschaftliche Nenner innerhalb der Integrationsgrenzen nicht Null werden darf.

Jener Nenner, wie die Ansicht der (f) und (g) a. a. O. *sofort* zeigt, enthält die w gar nicht, sondern bildet sich blos aus bekannten Grössen, die auch in den Δ enthalten sind, so dass man leicht wird beurtheilen können, ob dieser Nenner innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich wird.

Aber um zur Gleichung (L) zu gelangen, haben wir vorausgesetzt, dass

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\sum\sum w_{s,t}\,\xi_s\,\xi_t\right) dx = 0$$

sei. Diese Annahme ist nur gestattet, wenn $w_{s,t}$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleibt.

In die w treten $\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$ Konstanten ein; diese müssen sich also immer so bestimmen lassen, dass die w innerhalb der Integrationsgrenzen endliche Werthe haben *).

---

*) Die Formel (M) ist natürlich das eigentlich gesuchte Resultat unserer ganzen Betrachtung. Darin sind die σ und w nöthig, in so fern sie den (h) und den übrigen Gleichungen genügen, nicht aber gerade mit ihren allgemeinen Werthen. Giebt es also besondere Werthe der in w eintretenden Konstanten der Art, wie dies im Texte verlangt ist, so kann man ganz wohl die ihnen entsprechenden w wählen, da dieselben ja den (h) jedenfalls genügen.

Besonderer Fall des §. 4.

V. Der ganzen Anlage unserer Betrachtung nach muss n wenigstens 2 sein (§. 15, I.). Trotzdem kann man den Fall des §. 4 aus unserm Hauptresultate ziehen. Es ist dann $n = 1$, $r = 0$; die (g) in §. 15 fallen weg; die (f) heisst

$$w = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \sigma \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2};$$

die (h):

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \sigma^2;$$

die (L):

$$\delta^2 J = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} (\delta y' - \sigma \delta y)^2 dx.$$

Verglichen mit §. 4 müsste also:

$$\sigma = \frac{\frac{\partial y'}{\partial c_1} + m \frac{\partial y'}{\partial c_2}}{\frac{\partial y}{\partial c_1} + m \frac{\partial y}{\partial c_2}}, \quad w = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\frac{\partial y'}{\partial c_1} + m \frac{\partial y'}{\partial c_2}}{\frac{\partial y}{\partial c_1} + m \frac{\partial y}{\partial c_2}}$$

sein, worin m die eine eingetretene Konstante $\left[\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = 1\right]$ wäre.

Dabei wäre

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{d\sigma}{dx} + \sigma \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2},$$

so dass

$$\frac{d\sigma}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \sigma \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Setzen wir noch

$$\sigma = \frac{z'}{z}, \quad \frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

so ergiebt sich

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

wo man immer für y seinen Werth (§. 4) einzusetzen hat.

Diese Gleichung heisst

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y'} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial y'}y'$$
$$+ \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial y'^2}y'' - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

und ist identisch mit der

$$\frac{\partial W}{\partial y}z + \frac{\partial W}{\partial y'}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial W}{\partial y''}\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

in §. 4, IV. Daraus folgt denn unsere Behauptung.

Fall, da eine der Bedingungsgleichungen keinen Differentialquotienten der u enthält.

VI. Wir haben schon in §. 15, VI. darauf aufmerksam gemacht, dass die dortigen (g) wesentlich voraussetzen, es sei keine der Bedingungsgleichungen in der Lage, frei von allen (ersten) Differentialquotienten der u zu sein. Der Grund liegt einfach darin, dass dann die betreffende Gleichung in den r letzten des §. 14, IV. (k) kein y' enthielte, also ein Ersetzen aus den (e) in §. 15, IV. nicht anginge.

Fehlt etwa in φ_1 jeder Differentialquotient, so sind §. 14, II.

$$q_{1,1} = 0,\ q_{1,2} = 0, \ldots, q_{1,n} = 0.$$

Man könnte sich nun zu helfen suchen, indem man in (f) und (f') des §. 15 V. wegliesse:

$$M_{1,1},\ M_{2,1}, \ldots, M_{n,1},$$

also in (e') des §. 15, IV. m nicht $= 1$ zuliesse. Dadurch würde auch in (g) des §. 15, VI. der Fall $s = 1$ überflüssig und die (f) und (g) könnten die σ und M immer noch bestimmen. Das hiesse nun offenbar, die Bedingungsgleichung

$$\varphi_1 = 0$$

ganz aus dem Spiele lassen. Die Rechnung würde übrigens bis zu §. 16, I. ihren ungestörten Verlauf nehmen und auch der Ausdruck für $\delta^2 J$ in §. 16, II. würde auftreten. Denn ganz offenbar hängt alle diese Rechnung nicht wesentlich von der Zahl der Bedingungsgleichungen ab, wie sich dies aus dem Endresultate (L) in §. 16, II. ergiebt.

Dagegen hätte man aber die Bedingungsgleichungen (e') a. a. O. nicht aufstellen können, und damit wäre ein wesentlicher Theil des ganzen Resultates (§. 16, III.) nicht erhalten worden.

VII. In diesem Falle bleibt nichts übrig, als mittelst der Bedingungsgleichung, die keinen Differentialquotienten enthält, eine der Funktionen u durch die übrigen auszudrücken (oder ausgedrückt zu denken) und dann diese Bedingungsgleichung nicht weiter zu beachten.

Die Zahl der u vermindert sich dadurch, und man wird natürlich in dem Endergebniss (§. 16, III.) nur diese geringere Zahl einführen.

VIII. Wäre also etwa

$$\varphi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

eine solche Bedingungsgleichung, neben der die r anderen (§. 16) beständen, die keiner Beanstandung unterliegen, so würde man etwa u_n durch $u_1 \ldots, u_{n-1}$ mittelst (α) ausgedrückt denken, so dass also u_n als Funktion der übrigen Grössen erschiene (nebst x). Natürlich wären die r Bedingungsgleichen (b) des §. 11, I. ebenfalls umzuschreiben, oder eben in ihnen u_n als Funktion von $u_1, \ldots, u_{n-1}$ anzusehen. u'_n würde als Funktion von $u_1, \ldots, u_{n-1}, u'_1, \ldots, u'_{n-1}$ auftreten, und man hätte ebenso in Φ die Funktionen u_n, u'_n zu ersetzen.

In (M) des §. 16, III. hätte man die Summe

$$\sum_{s=1}^{s=n-1} \sum_{t=1}^{t=n-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_s \partial u'_t} P_s P_t,$$

und es beständen zwischen den P die dortigen (M′). Dabei aber wäre nun zu beachten, dass in φ_m ursprünglich auch u'_n enthalten ist, das durch den aus (α) folgenden Werth zu ersetzen ist. Daraus folgt, dass man in den (M′) an die Stelle von

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial u'_s} \text{ zu setzen hat: } \frac{\partial \varphi_m}{\partial u'_s} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial u'_n} \frac{\partial u'_n}{\partial u'_s},$$

wo $\dfrac{\partial u'_n}{\partial u'_s}$ aus (α) zu ziehen ist. Da diese Gleichung keinen Differentialquotienten enthält, so wird man sie zuerst differenziren und finden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} u'_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} u'_n = 0, \text{ also } \frac{\partial u'_n}{\partial u'_s} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_s}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_n}}.$$

Demnach schreibt man in den (M′) an die Stelle

$$\text{von } \frac{\partial \varphi_m}{\partial u'_s} \text{ jetzt } \frac{\frac{\partial \varphi_m}{\partial u'_s}\frac{\partial \varphi}{\partial u_n} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial u'_n}\frac{\partial \varphi}{\partial u_s}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_n}} \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

Ferner ist zu ersetzen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'_s} \text{ durch } \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u'_s}\frac{\partial \varphi}{\partial u_n} - \frac{\partial \Phi}{\partial u'_n}\frac{\partial \varphi}{\partial u_s}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_n}}$$

oder kürzer

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'_s} \text{ durch } \frac{\partial \Phi}{\partial u'_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial u'_n}\frac{\partial u'_n}{\partial u'_s},$$

also

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_s \partial u'_t} \text{ durch } \frac{\partial}{\partial u'_t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial u'_n}\frac{\partial u'_n}{\partial u'_s}\right) + \frac{\partial}{\partial u'_n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial u'_n}\frac{\partial u'_n}{\partial u'_s}\right)\frac{\partial u'_n}{\partial u'_t}$$

$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_s \partial u'_t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_t \partial u'_n}\frac{\partial u'_n}{\partial u'_s} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_n \partial u'_s}\frac{\partial u'_n}{\partial u'_t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_n}\frac{\partial u'_n}{\partial u'_s}\frac{\partial u'_n}{\partial u'_t},$$

da $\frac{\partial u'_n}{\partial u'_s}$, $\frac{\partial u'_n}{\partial u'_t}$ keine u' enthalten.

Da

$$\frac{\partial u'_n}{\partial u'_s} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_s}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_n}}, \quad \frac{\partial u'_n}{\partial u'_t} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_n}},$$

so ist also $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_s \partial u'_t}$ durch

$$\frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_s \partial u'_t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_n}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_s \partial u'_n}\frac{\partial \varphi}{\partial u_t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_t \partial u'_n}\frac{\partial \varphi}{\partial u_s}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u_n} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_n}\frac{\partial \varphi}{\partial u_s}\frac{\partial \varphi}{\partial u_t}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_n}\right)^2} \quad (\gamma)$$

zu ersetzen.

Wir übergehen weitere Fälle dieser Art, und wollen das Endergebniss nur auf §. 12 und 13 anwenden.

§. 17.

Besonderer Fall des §. 12.

I. Hier ist

$$\Phi = f + \lambda_1 (u'_1 - u_2) + \cdots + \lambda_{n-1} (u'_{n-1} - u_n),$$

also $r = n - 1$. Dann ist $\varphi_m = u'_m - u_{m+1}$; also

$p_{m,s}$ Null, ausser wenn $s = m + 1$, wo diese Grösse $= -1$,
$q_{m,s}$ „ „ „ $s = m$, „ „ „ $= +1$.

In den Werthen a, b, c ist überall Φ blos durch f zu ersetzen; eben so in (M). Die (M') heissen:

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0, \ldots, P_{n-1} = 0.$$

Also ist blos

$$\delta^2 J = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}} P^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Besonderer Fall des §. 13, I.

II. Hier ist

$$\Phi = f + \lambda_1 (u'_1 - u_2) + \cdots + \lambda_{n-1} (u'_{n-1} - u_n)$$
$$+ \lambda_{n+1} (u'_{n+1} - u_{n+2}) + \cdots + \lambda_{n+m-1} (u'_{n+m-1} - u_{n+m}),$$

also $r = n + m - 2$. Dann ist $\varphi_m = u'_m - u_{m+1}$,

$$m = 1, 2, \ldots, n - 1, n + 1, \ldots, n + m - 1.$$

Demnach

$p_{m,s}$ Null, ausser wenn $s = m + 1$, wo diese Grösse $= -1$,
$q_{m,s}$ „ „ „ $s = m$, „ „ „ $+1$.

Also die (M'):

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0, \ldots, P_{n-1} = 0,\ P_{n+1} = 0,\ P_{n+2} = 0, \ldots, P_{n+m-1} = 0.$$

Somit

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_n} P^2_n + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_n \partial u'_{n+m}} P_n P_{n+m} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_{n+m}} P^2_{n+m} \right) dx,$$

d. h. in den dortigen Zeichen

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}} P^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial z^{(m)}} PQ + \frac{\partial^2 f}{\partial z^{(m)2}} Q^2 \right) dx \quad \ldots \quad \text{(b)}$$

Hier sind P, Q ganz beliebige Grössen. Soll dieser Ausdruck immer von demselben Zeichen sein, so muss

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial z^{(m)}} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}} \frac{\partial^2 f}{\partial z^{(m)2}} < 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

und das Zeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}}$ ist entscheidend.

Besonderer Fall des §. 13, II., wenn φ einen der höchsten Differentialquotienten enthält.

III. Zunächst hat man dieselben Bedingungsgleichungen wie in II., nur ist denselben die (b) a. a. O. zuzuzählen. Daraus

$$\Phi = f + \lambda_1 (u'_1 - u_2) + \cdots + \lambda_{n-1} (u'_{n-1} - u_n) + \lambda_n \varphi$$
$$+ \lambda_{n+1} (u'_{n+1} - u_{n+2}) + \cdots + \lambda_{n+m-1} (u'_{n+m-1} - u_{n+m},$$

so dass

$p_{m,s}$ Null, ausser wenn $s = m + 1$, wo diese Grösse $= -1$,

$q_{m,s}$ " " " $s = m$, " " " $+1$,

dabei aber $m = 1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots, n+m-1$, während $p_{n,s}$, $q_{n,s}$ für $s = 1, 2, \ldots, n+m$

die Werthe:

$$p_{n,s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_s},\ q_{m,s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u'_s}$$

haben.

Die (M') geben

$$P_1 = 0, \ldots, P_{n-1} = 0,\ P_{n+1} = 0, \ldots, P_{n+m-1} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u'_n} P_n + \frac{\partial \varphi}{\partial u'_{n+m}} P_{n+m} = 0, \text{ d. h. } \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}} P_n + \frac{\partial \varphi}{\partial z^{(m)}} P_{n+m} = 0.$$

Somit wird (M):

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_n} P^2_n + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_n \partial u'_{n+m}} P_n P_{n+m} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_{n+m}} P^2_{n+m}\right] dx,$$

d. h. wenn

$$\psi = f + \nu \varphi \text{ (§. 13, II.)}:$$

$$\delta^2 J =$$

$$\int_a^b \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^{(n)2}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z^{(m)}}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^{(n)} \partial z^{(m)}} \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}} \frac{\partial \varphi}{\partial z^{(m)}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^{(m)2}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}}\right)^2}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z^{(m)}}\right)^2} P^2 dx \quad \text{(d)}$$

wobei selbstverständlich vorausgesetzt ist, dass $z^{(m)}$ in φ vorkomme. Ist dies nicht der Fall, so ist $P_n = 0$ und blos:

$$\delta^2 J = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial z^{(m)2}} P^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(d')}$$

Dies Ergebniss darf nicht überraschen. Da nämlich φ jetzt an Differentialquotienten der u nur u'_n enthält, so kann man diese Grösse aus f eliminiren und dann die Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ weglassen. Dadurch sind wir im Falle I., wo f an Differentialquotienten nur $u'_1, \ldots, u'_{n-1}, u'_{n+1}, \ldots, u'_{n+m}$ enthält. Wenn dann auch nicht $P_n = 0$, so fällt diese Grösse doch weg, weil

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_s \partial u'_t} \text{ Null ist für } s = n, \; t = n.$$

Demnach bleibt in (M) blos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_{n+m}} P^2_{n+m}.$$

Besonderer Fall des §. 13', II., da f nur z, $\frac{dz}{dx}$ und φ keinen Differentialquotienten enthält.

IV. Ist in §. 13, II. f blos eine Funktion von x, y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$, z, $\frac{dz}{dx}$ und enthält die dortige (b) keinen Differentialquotienten, so tritt nun §. 16, VIII. ein, wo für n zu setzen ist $n+1$, für r aber (II.) $n-1$. Dann ist $\varphi_m = u'_m - u_{m+1}$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$; $u_{m+1} = y^{(m)}$.

Die Grösse (β) a. a. O.:

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial u'_s} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial u'_{n+1}} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_s}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial u'_{n+1}} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial u'_s}$$

ist Null, ausser wenn $s = m$, wo diese Grösse $= 1$.

Also hat man, da die Summirung in (M) von 1 bis n läuft:

$$P_1 = 0, \; P_2 = 0, \ldots, P_{n-1} = 0;$$

es bleibt also in (M) nur $s = n$, $t = n$.

Die (γ) ist also

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_n} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - 2 \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u'_n \partial u'_{n+1}} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_n} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u'^2_{n+1}} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_n}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Da φ nur u_1, u_{n+1} enthält, so reduzirt sich diese Grösse im Allgemeinen auf

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^{(n)2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}},$$

ausser wenn $n = 1$, d. h. wenn f nur x, y, y', z, z' enthielt. Dann ist sie

$$\frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y' \partial z'}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2},\quad \Phi = f.$$

Demnach

$$\left.\begin{aligned}
\delta^2 J &= \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}}\, P^2 dx, \text{ wenn } n > 1;\\
\delta^2 J &= \int_a^b \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\, P^2 dx,
\end{aligned}\right\}\cdots (e)$$

wenn $n = 1$.

Diese Resultate ergeben sich übrigens auch aus (I.). Da man z durch x, y ausdrückt, so kommt in f nur y' hinein; ist demnach $n > 1$, so hat dies keinerlei Einfluss auf die Formel (a); daher unser erstes Ergebniss.

Ist dagegen $n = 1$, so ist, wenn $z = \psi(x, y)$ also

$$z' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\, y',$$

f zu ersetzen durch

$$f\left(x, y, y', \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} + y'\,\frac{\partial \psi}{\partial y}\right),$$

also ist

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \text{ jetzt } \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial z'}\,\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \text{ jetzt } \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'}\,\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z'^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2,$$

wo nun

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = -\,\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Daraus ergibt sich das zweite Resultat.

Nach diesen besonderen Untersuchungen wenden wir uns wieder zur allgemeinen Theorie, die noch nicht zu völligem Abschluss gelangt ist (§. 16, IV.).

§. 18.

Fortsetzung der Untersuchungen der §§. 14—16.

I. Das in §. 16, III. mitgetheilte Endergebniss ist allerdings völlig klar; weniger ist dies aber mit dem in §. 16, IV. angegebenen der Fall, da zwar wohl hinsichtlich der σ sich ein Urtheil fällen lässt, hinsichtlich der w die Sache aber im Unklaren ist. Die Gleichungen (h) in §. 15, VII. lassen sich wohl bilden, aber schwer integriren, und doch ist dies nothwendig, wenn wir zu entscheidender Klarheit gelangen wollen. Wir werden uns also vorzugsweise mit dieser Integration noch zu beschäftigen haben. Dabei kehren wir zu den Formeln des §. 11, IV., V. zurück, wobei wir auf §. 11, VIII. aufmerksam machen, wonach die in §. 11, V. gemeinte Funktion V sich aus einem beliebigen Integralsystem herstellen lässt.

Die Gleichung (b) des §. 15 für $E = 0$.

II. Wir haben in §. 15 gesehen, dass es sich um die eben genannte Gleichung handelt, wenn $E = 0$. Dieselbe ist dann

$$\sum_{s=1}^{s=n}\left[y_{s,\alpha}\frac{\partial\Gamma_\beta}{\partial y'_{s,\beta}} - y_{s,\beta}\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial y'_{s,\alpha}}\right] = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \text{(a)}$$

wenn Γ die in §. 14, IV. angegebene Bedeutung hat, wobei zugleich y_s durch die Gleichungen (h') a. a. O. bestimmt ist.

Es ist aber

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial y'_s} = b_{1,s}y_1 + \cdots + b_{n,s}y_n + c_{1,s}y_1' + \cdots + c_{n,s}y_n' + q_{1,s}z_1 + \cdots + q_{r,s}z_r;$$

ferner

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_s'} = \frac{\partial F}{\partial u_s'} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_s'} + \cdots + \lambda_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial u_s'},$$

also wenn man u, u' durch x und die Konstanten h (§. 14, II.) ausgedrückt denkt:

$$\frac{\partial}{\partial h}\frac{\partial \Phi}{\partial u_s'} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_s'}\right)\frac{\partial u_1}{\partial h} + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\frac{\partial \Phi}{\partial u_s'}\right)\frac{\partial u_n}{\partial h}$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial u_1'}\frac{\partial \Phi}{\partial u_s'}\right)\frac{\partial u_1'}{\partial h} + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial u_n'}\frac{\partial \Phi}{\partial u_s'}\right)\frac{\partial u_n'}{\partial h} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_s'}\frac{\partial \lambda_1}{\partial h} + \cdots$$
$$+ \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_s'}\frac{\partial \lambda_r}{\partial h} = b_{1,s}\frac{\partial u_1}{\partial h} + \cdots + b_{n,s}\frac{\partial u_n}{\partial h} + c_{1,s}\frac{\partial u_1'}{\partial h} + \cdots$$
$$+ c_{n,s}\frac{\partial u_n'}{\partial h} + q_{1,s}\frac{\partial \lambda_1}{\partial h} + \cdots + q_{r,s}\frac{\partial \lambda_r}{\partial h}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit C (wo C eine der in §. 14, IV. vorkommenden Konstanten ist); legt dann h die Werthe $h_1, \ldots, h_{2n}$, und C die: $C_1, \ldots, C_{2n}$ bei; addirt hierauf und beachtet die (h) in §. 14, IV., so ergibt sich

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y'_s} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2n}\left(C_\mu \frac{\partial}{\partial h_\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial u_s'}\right).$$

Da aber nach §. 11, V.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'_s} = \frac{\partial V}{\partial u_s},$$

welche Gleichung nur identisch stattfindet, wenn man die Werthe der u einsetzt, wie dies oben verlangt ist, so hat man

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y'_s} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2n}\left(C_\mu \frac{\partial}{\partial h_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Hierbei ist V eine Funktion von $x, u_1, \ldots, u_n$ (mit den b in §. 11, V.). Da die einzelnen Systeme der y in (a) sich nur durch die Werthe der Konstanten C unterscheiden, so ist es jetzt zweckmässig, die Zeiger α, β an letztere anzuhängen, so dass etwa

$(\mu = 1, 2, \ldots, 2n)$

$$y_{s,\alpha}\frac{\partial \Gamma}{\partial y'_{s,\beta}} = \left(\sum C_{\mu,\alpha}\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu}\right)\left(\sum C_{\mu,\beta}\frac{\partial}{\partial h_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right)$$
$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=2n}\sum_{\nu=1}^{\nu=2n}\left(C_{\mu,\alpha}\, C_{\nu,\beta}\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu}\frac{\partial}{\partial h_\nu}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right);$$
$$y_{s,\beta}\frac{\partial \Gamma}{\partial y'_{s,\alpha}} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2n}\sum_{\nu=1}^{\nu=2n}\left(C_{\mu,\beta}\, C_{\nu,\alpha}\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu}\frac{\partial}{\partial h_\nu}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right).$$

Der erste Werth heisst offenbar auch

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n}\sum_{\nu=1}^{\nu=2n}\left(C_{\nu,\alpha}\, C_{\mu,\beta}\frac{\partial u_s}{\partial h_\nu}\frac{\partial}{\partial h_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right),$$

Der zweite:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n} \sum_{\nu=1}^{\nu=2n} \left(C_{\nu,\beta}\, C_{\mu,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} \frac{\partial}{\partial h_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \right).$$

Fügt man diese Werthe je bei und nimmt dann die Hälfte der Summe, so ergibt sich

$$y_{s,\alpha} \frac{\partial \Gamma}{\partial y'_{s,\beta}} - y_{s,\beta} \frac{\partial \Gamma}{\partial y'_{s,\alpha}} = \tfrac{1}{2} \sum \sum \Big[C_{\mu,\alpha}\, C_{\nu,\beta} \frac{\partial u_s}{\partial h_\mu} \frac{\partial}{\partial h_\nu} \frac{\partial V}{\partial u_s}$$
$$+ C_{\nu\alpha}\, C_{\mu,\beta} \frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} \frac{\partial}{\partial h_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} - C_{\mu,\beta}\, C_{\nu,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial h_\mu} \frac{\partial}{\partial h_\nu} \frac{\partial V}{\partial u_s}$$
$$- C_{\nu,\beta}\, C_{\mu,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} \frac{\partial}{\partial h_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \Big].$$

Dadurch wird die (a):

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n} \sum_{\nu=1}^{\nu=2n} (C_{\mu,\alpha}\, C_{\nu,\beta} - C_{\mu,\beta}\, C_{\nu,\alpha}) \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu} \frac{\partial}{\partial h_\nu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \right.$$
$$\left. - \frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} \frac{\partial}{\partial h_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (a')$$

Dies ist nun der neue Ausdruck der Gleichung (b) in §. 15 für $E = 0$.

Nähere Untersuchung dieser Gleichung.

III. Wir haben in §. 15, II. gesehen, dass die w, wenn sie der dortigen Bedingung (c′) unterworfen werden, mit dieser Gleichung *eng* zusammenhängen.

Die Konstanten h, die in (a′) dermalen vorkommen, da wir die Auflösung des §. 11, V. voraussetzen, sind die dortigen b, β, die wir der Natur der Sache nach in die zwei Gruppen: $b_1, \ldots, b_n$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ scheiden, so dass

$$h_\mu = b_\mu \text{ für } \mu \lesseqgtr n;\ h_\mu = \beta_{\mu-n} \text{ für } \mu > n. \quad \ldots \quad (\alpha)$$

Es ist aber

$$\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu} \frac{\partial}{\partial h_\nu} \frac{\partial V}{\partial u_s} - \frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} \frac{\partial}{\partial h_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} = \frac{\partial}{\partial h_\nu} \left(\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \right) - \frac{\partial}{\partial h_\mu} \left(\frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \right);$$

somit

$$\sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu} \frac{\partial}{\partial h_\nu} \frac{\partial V}{\partial h_s} - \frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} \frac{\partial}{\partial h_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \right) = \frac{\partial}{\partial h_\nu} \sum \left(\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \right)$$
$$- \frac{\partial}{\partial h_\mu} \sum \left(\frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \right) \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Weiter ist, da die u durch ihre Werthe ersetzt sind:

$$\frac{dV}{dh_\mu} = \sum \frac{\partial V}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial h_\mu} + \frac{\partial V}{\partial h_\mu}, \quad \frac{dV}{dh_\nu} = \sum \frac{\partial V}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial h_\nu} + \frac{\partial V}{\partial h_\nu},$$

wo die Bedeutung der Zeichen

$$\frac{dV}{dh_\mu}, \quad \frac{\partial V}{\partial h_\mu}$$

wohl sofort klar ist. Demnach ist obige Grösse (β), wenn man beachtet, dass das vor das Σzeichen gesetzte Differenzirungszeichen das einer vollständigen Differenzirung ist:

$$\frac{d}{dh_\nu}\left(\frac{dV}{dh_\mu} - \frac{\partial V}{\partial h_\mu}\right) - \frac{d}{dh_\mu}\left(\frac{dV}{dh_\nu} - \frac{\partial V}{\partial h_\nu}\right) = \frac{d}{dh_\mu}\frac{\partial V}{\partial h_\nu} - \frac{d}{dh_\nu}\frac{\partial V}{\partial h_\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta')$$

Dies ist in (a') einzusetzen, und es sollen μ, ν von 1 bis $2n$ gehen. Nun ist wegen (α) h_μ nicht in V erhalten, wenn $\mu > n$, so dass also (β') Null ist, wenn μ und ν grösser als n (beide zugleich).

Wir wollen nun ein Glied des Ausdrucks (a') betrachten:

$$(C_{\mu,\alpha}\, C_{\nu,\beta} - C_{\nu,\alpha}\, C_{\mu,\beta}) \left[\frac{d}{dh_\mu}\frac{\partial V}{\partial h_\nu} - \frac{d}{dh_\nu}\frac{\partial V}{\partial h_\mu}\right] \ldots (\gamma)$$

Sei $\mu \lesseqgtr n$, $\nu \lesseqgtr n$. Dann ist

$$\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = \frac{\partial V}{\partial b_\mu}, \quad \frac{\partial V}{\partial h_\nu} = \frac{\partial V}{\partial b_\nu},$$

d. h. wegen der (E) in §. 11, V.:

$$\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = \beta_\mu, \frac{\partial V}{\partial h_\nu} = \beta_\nu; \ \frac{d}{dh_\mu}\frac{\partial V}{\partial h_\nu} - \frac{d}{dh_\nu}\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = \frac{d\beta_\nu}{db_\mu} - \frac{d\beta_\mu}{db_\nu} = 0.$$

Sei $\mu \lesseqgtr n$, $\nu > n$. Dann

$$\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = \beta_\mu, \ \frac{\partial V}{\partial h_\nu} = 0; \ \frac{d}{dh_\mu}\frac{\partial V}{\partial h_\nu} - \frac{d}{dh_\nu}\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = -\frac{d\beta_\mu}{d\beta_{\nu-n}}.$$

Sei $\mu > n$, $\nu \lesseqgtr n$:

$$\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial h_\nu} = \beta_\nu; \ \frac{d}{dh_\mu}\frac{\partial V}{\partial h_\nu} - \frac{d}{dh_\nu}\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = \frac{d\beta_\nu}{d\beta_{\mu-n}}.$$

Endlich sei $\mu > n$, $\nu > n$:

$$\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial h_\nu} = 0; \ \frac{d}{dh_\mu}\frac{\partial V}{\partial h_\nu} - \frac{d}{dh_\nu}\frac{\partial V}{\partial h_\mu} = 0.$$

Trennen wir weiter die Konstanten $C_1, \ldots, C_{2n}$ (die $h_1, \ldots, h_{2n}$ entsprechen) in zwei Gruppen: $A_1, \ldots, A_n$, welche $b_1, \ldots, b_n$,

und $B_1, \ldots, B_n$, welche $\beta_1, \ldots, \beta_n$ entsprechen, so wird in dem Ausdruck (γ) nur zu gleicher Zeit $\mu \gtreqless n$, $\nu > n$, und $\mu > n$, $\nu \gtreqless n$ sein können. Lässt man also μ von 1 bis $2n$ laufen, und zwar zuerst von 1 bis n, so ist nur $\nu > n$, und für ein bestimmtes μ jener Ausdruck

$$(A_{\mu,\alpha} B_{\nu-n,\beta} - A_{\mu,\beta} B_{\nu-n,\alpha}) \left(-\frac{d\beta_\mu}{d\beta_{\nu-n}}\right),$$

der für alle ν Null ist, ausser wenn $\nu - n = \mu$, $\nu = n + \mu$. Demnach reduzirt die Summe (nach ν) sich für ein bestimmtes μ auf $(A_{\mu,\alpha} B_{\mu,\beta} - A_{\mu,\beta} B_{\mu,\alpha})\,(-1)$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$.

Ist dann $\mu > n$, also $\nu \gtreqless n$, so ist eben so die Summe (nach μ):

$$(A_{\nu,\beta} B_{\nu,\alpha} - A_{\nu,\alpha} B_{\nu,\beta})\,(+1), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Daraus ergibt sich offenbar, dass die (a') heisst:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} (A_{\mu,\alpha} B_{\mu,\beta} - A_{\mu,\beta} B_{\mu,\alpha}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Dies ist nunmehr die Form der Gleichung (a), d. h. die erste Seite der Gleichung (b) des §. 15, I. ist die erste Seite dieser Gleichung (c), woraus allerdings klar hervorgeht, dass dieselbe eine Konstante ist. Die obige Gleichung stellt dann eine Beziehung zwischen den A, B fest.

Folgerungen aus den (c).

IV. Da wir n Systeme der C betrachtet haben, so sind die Gleichungen (c) Gleichungen zwischen den Grössen

$$B_{\mu,1}, \ldots, B_{\mu,n} \text{ und } A_{\mu,1}, \ldots, A_{\mu,n}, \text{ wo } \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Anzahl der Gleichungen (c) ist übrigens, da für $\alpha = \beta$ die (c) identisch ist und ein Vertauschen von α und β dieselbe Gleichung erzeugt: $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$. Diesen Gleichungen, welche eben so viele Beziehungen zwischen den B und A festsetzen, lässt sich genügen durch

$$B_{\mu,s} = h_{1,\mu} A_{1,s} + h_{2,\mu} A_{2,s} + \cdots + h_{n,\mu} A_{n,s}, \quad s = 1, 2, \ldots, n \quad . \quad \text{(d)}$$

wo die h (die natürlich mit dem Früheren Nichts gemein haben) der Zahl nach n^2 sind, so viele als die (d) (μ, s jedes von 1 bis n). Dadurch wird nämlich:

$$A_{\mu,\alpha} B_{\mu,\beta} - A_{\mu,\beta} B_{\mu,\alpha} = \sum h_{\nu,\mu} (A_{\mu,\alpha} A_{\nu,\beta} - A_{\mu,\beta} A_{\nu,\alpha}),$$

und die (c):

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} h_{\nu,\mu} (A_{\mu,\alpha} A_{\nu,\beta} - A_{\mu,\beta} A_{\nu,\alpha}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d')$$

welche Gleichungen selbstverständlich keine Beziehungen zwischen den A festsetzen, also für alle möglichen A richtig, d. h. identisch erfüllt sein müssen (wodurch sich vielleicht nothwendige Beziehungen zwischen den h ergeben).

Betrachten wir eine dieser Gleichungen (beliebiges α, β), so wird, wenn ν, μ gleich sind, das betreffende Glied wegfallen; sind sie verschieden, so kommen immer zwei Glieder:

$h_{\nu,\mu} (A_{\mu,\alpha} A_{\nu,\beta} - A_{\nu,\alpha} A_{\mu,\beta})$ und $h_{\mu,\nu} (A_{\nu,\alpha} A_{\mu,\beta} - A_{\mu,\alpha} A_{\nu,\beta})$
d. h.

$$(h_{\nu,\mu} - h_{\mu,\nu}) (A_{\mu,\alpha} A_{\nu,\beta} - A_{\nu,\alpha} A_{\mu,\beta})$$

vor. Daraus folgt, weil die Gleichung identisch erfüllt sein *muss:*

$$h_{\nu,\mu} = h_{\mu,\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Mit dieser Bedingung, welche die Zahl der $h_{\mu,\nu}$ auf $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ verringert, ist jede der (c) erfüllt. Die eben genannten h bleiben somit ganz willkürlich. Man hat hiernach:

$$\left.\begin{aligned} B_{\mu,1} &= h_{1,\mu} A_{1,1} + \cdots + h_{n,\mu} A_{n,1} \\ B_{\mu,2} &= h_{1,\mu} A_{1,2} + \cdots + h_{n,\mu} A_{n,2} \\ &\vdots \\ B_{\mu,n} &= h_{1,\mu} A_{1,n} + \cdots + h_{n,\mu} A_{n,n} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

nebst der (e). $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ der Grössen h bleiben ganz willkürlich, wie es übrigens deren nicht mehr sind.

In den (h) des §. 14, IV. ist:

$$\begin{aligned} y_{s,\alpha} &= A_{1,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial b_1} + \cdots + A_{n,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial b_n} + B_{1,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial \beta_1} + \cdots + B_{n,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial \beta_n} \\ &= A_{1,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial b_1} + \cdots + A_{n,\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial b_n} + (h_{1,1} A_{1,\alpha} + \cdots + h_{n,1} A_{n,\alpha}) \frac{\partial u_s}{\partial \beta_n} \\ &\qquad + \cdots \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad + (h_{1,n} A_{1,\alpha} + \cdots + h_{n,n} A_{n,\alpha}) \frac{\partial u_s}{\partial \beta_n} \\ &= A_{1,\alpha} U_{s,1} + A_{2,\alpha} U_{s,2} + \cdots + A_{n,\alpha} U_{s,n}, \end{aligned}$$

wenn

$$U_{s,\mu} = \frac{\partial u_s}{\partial b_\mu} + h_{\mu,1}\frac{\partial u_s}{\partial \beta_1} + \cdots + h_{\mu,n}\frac{\partial u_s}{\partial \beta_n} \quad . \; . \; . \quad \text{(f)}$$

Die U sind, da s und μ von 1 bis n gehen, der Zahl nach n^2; ausser den willkürlichen $\frac{n(n+1)}{1 \, . \, 2}$ Grössen $h_{s,t}$ kommen nur bekannte Grössen darin vor.

Bestimmung der w.

V. Es ist (§. 15, II.):

$$w_{s,1}\, y_{1,\alpha} + \cdots + w_{s,n}\, y_{n,\alpha} = \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial y'_{s,\alpha}}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left(A_{\mu,\alpha}\frac{d}{db_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s} + B_{\mu,\alpha}\frac{d}{d\beta_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right) \text{ (§. 18, II.)}$$

$$= \sum\left[A_{\mu,\alpha}\frac{d}{db_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s} + (h_{1,\mu}A_{1,\alpha} + \cdots + h_{n,\mu}B_{n,\alpha})\frac{d}{d\beta_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right].$$

Wegen (f):

$$w_{s,1}\, y_{1,\alpha} + \cdots + w_{s,n}\, y_{n,\alpha} = \sum_{m=1}^{m=n} w_{s,m}\, y_{m,\alpha}$$

$$= \sum_{m=1}^{m=n}(A_{1,\alpha}U_{m,1} + \cdots + A_{n,\alpha}U_{m,n})\, w_{s,m}.$$

Demnach wird obige Gleichung:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left[A_{\mu,\alpha}\frac{d}{db_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s} + (h_{1,\mu}A_{1,\alpha} + \cdots + h_{n,\mu}A_{n,\mu})\frac{d}{d\beta_\mu}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right]$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=n}(A_{1,\alpha}U_{\mu,1} + \cdots + A_{n,\alpha}U_{\mu,n})\, w_{s,\mu},$$

d. h.

$$\begin{aligned} &A_{1,\alpha}\Big[U_{1,1}w_{s,1} + \cdots + U_{n,1}w_{s,n} - \frac{d}{db_1}\frac{\partial V}{\partial u_s} \\ &\qquad - \left(h_{1,1}\frac{d}{d\beta_1}\frac{\partial V}{\partial u_s} + \cdots + h_{1,n}\frac{d}{d\beta_n}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right)\Big] \\ &+ \cdots \\ &\quad \vdots \\ &+ A_{n,\alpha}\Big[U_{1,n}w_{s,1} + \cdots + U_{n,n}w_{s,n} - \frac{d}{db_n}\frac{\partial V}{\partial u_s} \\ &\qquad - \left(h_{n,1}\frac{d}{d\beta_1}\frac{\partial V}{\partial u_s} + \cdots + h_{n,n}\frac{d}{d\beta_n}\frac{\partial V}{\partial u_s}\right)\Big] = 0. \end{aligned}$$

Da die neben den A stehenden Factoren von α nicht abhängen; diese Gleichungen aber richtig sind für $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, so folgt sofort, dass eben diese Factoren Null sein müssen. Demnach

$$\left.\begin{aligned} U_{1,1} w_{s,1} + \cdots + U_{n,1} w_{s,n} &= \frac{d}{db_1} \frac{\partial V}{\partial u_s} \\ &+ h_{1,1} \frac{d}{d\beta_1} \frac{\partial V}{\partial u_s} + \cdots + h_{1,n} \frac{d}{d\beta_n} \frac{\partial V}{\partial u_s}, \\ &\vdots \\ U_{1,n} w_{s,1} + \cdots + U_{n,n} w_{s,n} &= \frac{d}{db_n} \frac{\partial V}{\partial u_s} \\ &+ h_{n,1} \frac{d}{d\beta_1} \frac{\partial V}{\partial u_s} + \cdots + h_{n,n} \frac{d}{d\beta_n} \frac{\partial V}{\partial u_s}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(g)}$$

welche Gleichungen allgemein durch

$$\begin{aligned} U_{1,t} w_{s,1} + U_{2,t} w_{s,2} + \cdots + U_{n,t} w_{s,n} &= \frac{d}{db_t} \frac{\partial V}{\partial u_s} \\ &+ \left(h_{t,1} \frac{d}{d\beta_1} \frac{\partial V}{\partial u_s} + \cdots + h_{t,n} \frac{d}{d\beta_n} \frac{\partial V}{\partial u_s}\right) \quad \ldots \text{(g')} \end{aligned}$$

ausgedrückt werden können, wo s, t von 1 bis n gehen.

Die Gleichungen (g) liefern nun die w des §. 15 mit den $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ willkürlichen Konstanten $h_{s,t}$. Dabei ist die Bedeutung des Zeichens

$$\frac{d}{db_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{d\beta_\mu} \frac{\partial V}{\partial u_s}$$

die, dass man V, wie diese Grösse in §. 11, V. gefunden wurde, nach u_s partiell differenzire, dann für u die gefundenen Werthe (in x, u, b, β) einsetze und nun (vollständig) nach b_μ (oder β_μ) differenzire.

Wirkliche Herstellung der w.

VI. Die zweite Seite in (g') heisst:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial b_t \partial u_s} + \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_s} \frac{\partial u_1}{\partial b_t} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial u_n \partial u_s} \frac{\partial u_n}{\partial b_t} \\ &+ h_{t,1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_s} \frac{\partial u_1}{\partial \beta_1} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial u_n \partial u_s} \frac{\partial u_n}{\partial \beta_1}\right) \\ &\vdots \\ &+ h_{t,n} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_s} \frac{\partial u_1}{\partial \beta_n} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial u_n \partial u_s} \frac{\partial u_n}{\partial \beta_n}\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial b_t \partial u_s} + \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_s} U_{1,t} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial u_n \partial u_s} U_{n,t}, \end{aligned}$$

so dass

$$\left(w_{s,1}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_n\,\partial u_s}\right)U_{1,t}+\cdots+\left(w_{s,n}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_n\,\partial u_s}\right)U_{n,t}=\frac{\partial^2 V}{\partial b_t\,\partial u_s}\,. \quad (g'')$$

Aus den n letzten Gleichungen (E) in §. 11, V., die identisch werden, wenn man die u einsetzt, folgt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial b_s}+\frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial b_s}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial b_s}=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial b_s}+\frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial b_s}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial b_s}=0,$$

woraus die Grössen

$$\frac{\partial u_1}{\partial b_s},\ldots,\frac{\partial u_n}{\partial b_s}$$

folgen. Setzt man

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial u_1},\ldots,\frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial u_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial u_1},\ldots,\frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial u_n} \end{vmatrix} = \Pi \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

ferner

$$\Pi_{\mu,\nu} \text{ den Koeffizienten von } \frac{\partial^2 V}{\partial b_\mu\,\partial u_\nu} \text{ in } \Pi,$$

so ist

$$\Pi\frac{\partial u_m}{\partial b_s}=-\Pi_{1,m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial b_s}-\cdots-\Pi_{n,m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial b_s} \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

Aus denselben Gleichungen (E) hätte man aber wieder obige Gleichungen erhalten, wenn man nach β_s differenzirt hätte, mit dem Unterschiede, dass die ersten Glieder Null wären, ausser in der s-ten Gleichung, wo es -1 wäre. Demnach

$$\Pi\frac{\partial u_m}{\partial \beta_s}=\Pi_{s,m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i')$$

Setzt man dies in (f):

$$\Pi\, U_{m,s}=\Pi_{1,m}\tau_{1,s}+\cdots+\Pi_{n,m}\tau_{n,s} \quad \ldots\ldots \quad (k)$$

wenn

$$\tau_{t,s}=h_{s,t}-\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\,\partial b_t}.$$

Dadurch wird nun (g''):

$$\begin{aligned}&\left(w_{s,1}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_1\,\partial u_s}\right)(\Pi_{1,1}\tau_{1,t}+\cdots+\Pi_{n,1}\tau_{n,t})\\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \Pi\frac{\partial^2 V}{\partial b_t\,\partial u_s},\\ &+\left(w_{s,n}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_n\,\partial u_s}\right)(\Pi_{1,n}\tau_{1,t}+\cdots+\Pi_{n,n}\tau_{n,t})\end{aligned}$$

welche Gleichung man auch schreiben kann:

$$\begin{aligned}&\tau_{1,t}\left[\Pi_{1,1}\left(w_{s,1}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_1\,\partial u_s}\right)+\cdots+\Pi_{1,n}\left(w_{s,n}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_n\,\partial u_s}\right)\right]\\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \Pi\frac{\partial^2 V}{\partial b_t\,\partial u_s}.\\ &+\tau_{n,t}\left[\Pi_{n,1}\left(w_{s,1}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_1\,\partial u_s}\right)+\cdots+\Pi_{n,n}\left(w_{s,n}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_n\,\partial u_s}\right)\right]\end{aligned}$$

Daneben ist identisch

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial u_r}\left[\left(w_{s,1}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_1\,\partial u_s}\right)\Pi_{1,1}+\cdots+\left(w_{s,n}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_n\,\partial u_s}\right)\Pi_{1,n}\right]\\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad = \Pi\left(w_{s,r}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_r\,\partial u_s}\right),\\ &+\frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial u_r}\left[\left(w_{s,1}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_1\,\partial u_s}\right)\Pi_{n,1}+\cdots+\left(w_{s,n}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_n\,\partial u_s}\right)\Pi_{n,n}\right]\end{aligned}$$

wie eine bekannte Grundeigenschaft der Determinanten sofort ergibt. Setzt man

$$\left(w_{s,1}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_1\,\partial u_s}\right)\Pi_{\mu,1}+\cdots+\left(w_{s,n}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_n\,\partial u_s}\right)\Pi_{\mu,n}=N_\mu,$$

so heissen obige Gleichungen, in denen $t=1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}&\Pi\frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial u_s}-\tau_{1,1}N_1-\cdots-\tau_{n,1}N_n=0,\\ &\quad\vdots\\ &\Pi\frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial u_s}-\tau_{1,n}N_1-\cdots-\tau_{n,n}N_n=0,\\ -&\Pi\left(w_{r,s}-\frac{\partial^2 V}{\partial u_r\,\partial u_s}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial b_1\,\partial u_r}N_1+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial b_n\,\partial u_r}N_n=0.\end{aligned}$$

Eliminirt man hieraus Π, $N_1, \ldots, N_n$, so ergibt sich, wenn man zugleich die Werthe von τ einsetzt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u_r \partial u_s} - w_{r,s}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial u_r}, & \dots\dots\dots, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_n \partial u_r} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial u_s}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_1} - h_{1,1}, & \dots, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_n \partial b_1} - h_{n,1} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial u_s}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_2} - h_{2,1}, & \dots, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_n \partial b_2} - h_{n,2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b_n \partial u_s}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_n} - h_{1,n}, & \dots, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_n \partial b_n} - h_{n,n} \end{vmatrix} = 0 \,. \text{(N)}$$

eine Gleichung, die nun endgiltig $w_{r,s}$ liefert. Ganz offenbar folgt daraus

$$w_{r,s} = w_{s,r}.$$

In Bezug auf die Bedeutung der Zeichen ist zu bemerken, dass

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_\mu \partial b_\nu}$$

eben den partiellen (zweiten) Differentialquotienten nach b_μ, b_ν bedeutet, wie diese Grössen entwickelt in V vorkommen, und dass *nach* der Differenzirung die u zu ersetzen sind.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_\mu \partial u_\nu}$$

meint, man solle eben so V partiell nach b_μ, u_ν differenziren und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_\mu \partial u_\nu},$$

man solle partiell nach u_μ, u_ν differenziren, wie je diese Grössen entwickelt in V vorkommen. Dann sollen jeweils, nach der Differenzirung, die u ersetzt werden.

VII. Entwickelt man $w_{r,s}$ aus (N), so hat diese Grösse den Nenner

$$\begin{vmatrix} \tau_{1,1}, & \tau_{2,1}, & \dots, & \tau_{n,1} \\ \tau_{1,2}, & \tau_{2,2}, & \dots, & \tau_{n,2} \\ \vdots & & & \\ \tau_{1,n}, & \tau_{2,n}, & \dots, & \tau_{n,n} \end{vmatrix}, \text{ wo } \tau_{r,s} = h_{r,s} - \frac{\partial^2 V}{\partial b_r \partial b_s} \,.\;.\;.\;.\; \text{(P)}$$

Darin ist $h_{\mu,\nu}$ ganz willkürlich, nur immer $h_{\mu,\nu} = h_{\nu,\mu}$.

Heisst dieser Nenner P, der aus den (f) und (g) in §. 15 sich ergebende Nenner für die σ: Q, so ist $P\,Q$ der eigentliche Nenner der in Δ

(§. 16, II.) eintretenden σ. Dieser nun darf innerhalb der Integrationsgrenzen nicht Null sein (§. 16, IV.) und es müssen also die $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ willkürlichen Konstanten $h_{r,s}$ sich so bestimmen lassen können, dass dies nicht eintritt.

Endgiltige Zusammenstellung.

VIII. Fassen wir nunmehr die ganze seitherige, der Natur der Sache nach weitläufige Entwicklung in ihren Endergebnissen zusammen, so können wir die nachstehenden Vorschriften geben:

Um zu entscheiden, ob die nach §. 11 (als dem allgemeinsten Falle) ermittelten Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ mit $2n$ willkürlichen Konstanten in der dortigen Grösse (a), oder auch in (§. 14, I.):

$$\int_a^b \Phi\, dx, \quad \Phi = F + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

ein Maximum oder Minimum hervorbringen, bilde man

1. die Grösse (M) in §. 16, III., worin die P durch die dortigen (M′) zusammenhängen, und setze (nachdem $\Phi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ differenzirt sind) nöthigenfalls die Werthe der u ein. Dann muss die Grösse unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen beständig dasselbe Zeichen, wenn die nicht durch (M′) bestimmten P ganz beliebige Werthe haben. Für ein Minimum muss dieses Zeichen das positive, für ein Maximum das negative sein.

2. Aus den Gleichungen (f), (g) in §. 15, V., VI. den gemeinschaftlichen Nenner der Werthe σ; derselbe heisse N (Erklärung der Zeichen in §. 14, II.).

3. Die Determinante (P) in §. 18, VII., wo die Bedeutung der vorkommenden Zeichen aus §. 11, V. zu entnehmen ist; diese Determinante heisse M. Sie enthält $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ willkürliche Grössen $h_{r,s}$, bei welchen

$$h_{r,s} = h_{s,r}.$$

4. Endlich untersuche man, ob nicht N Null wird innerhalb der Integrationsgrenzen; sodann ob sich die willkürlichen Konstanten $h_{r,s}$ so bestimmen lassen, dass nicht M Null wird innerhalb derselben Grenzen. Ist beides der Fall, so entscheidet das in Nr. 1

Gesagte endgiltig über das Maximum oder Minimum. Ist aber nicht beides der Fall, so ist die Frage nicht entschieden.

Damit ist die Aufgabe gelöst, die wir uns gestellt haben. Wir bemerken nur noch, dass wir voraussetzen, es erscheinen $2n$ willkürliche Konstanten (§. 16, VI.). Für einen besonderen Fall anderer Art gelten unsere Formeln nicht (§. 16, VII.; §. 17, IV.).

Allgemeinster Fall.

IX. Liegt die Aufgabe vor

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, u, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n')\, dx$$

zu einem M. M. zu machen, wenn dabei die Bedingungen (b) in §. 11, I. bestehen, so verfährt man nach §. 10, III., wenn dort Φ an die Stelle von f tritt.

Hinsichtlich der Entscheidung, ob M. M., wird man ganz nach den Grundsätzen des §. 6, IV. verfahren. Zuerst wird nach VIII. entschieden, wobei x_1, x_2 als fest (wenn auch unbestimmt) angesehen *sind*, und die Konstanten der Integration noch unbestimmt, aber *fest*, bleiben.

Diese Konstanten (nebst x_1, x_2) werden dann so zu bestimmen sein, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi\, dx,$$

unter Berücksichtigung der Grenzgleichungen, zu denen die (b) des §. 11, I. nicht gehören, ein M. M. wird (nachdem man die u eingesetzt *). Die Entscheidung darüber erfolgt in einer aus den Elementen her bekannten Weise.

---

*) Hier ist zu beachten, dass wenn allgemein c eine der eingetretenen Konstanten ist, dieselbe nicht nur in den u, u', sondern auch den λ vorkommt. Deshalb ist (§. 10, III.)

$$\frac{d}{dc}\int_{x_1}^{x_2} \Phi\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{s=1}^{s=n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_s'}\frac{\partial u_s'}{\partial c}\right) dx + \int_{x_1}^{x_n} \sum_{s=1}^{s=r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_s}\frac{\partial \lambda_s}{\partial c}\right) dx,$$

wo aber $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_s} = \varphi_s$, und da φ_s identisch Null ist, so bleibt blos

Damit ist nun die Theorie abgeschlossen, und wir haben nur noch an Beispielen zu zeigen, wie sie benutzt wird.

$$\frac{d}{dc}\int_{x_1}^{x_2} \Phi\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_s'}\,\frac{\partial u_s}{\partial c}\right) dx,$$

wie in §. 10, III., also

$$\frac{d}{dc}\int_{x_1}^{x_2} \Phi\, dx = \mathop{\Big/}_{x=x_1}^{x=x_2}\left(\sum \frac{\partial \Phi}{\partial u_s'}\,\frac{\partial u_s}{\partial c}\right),$$

wo $\Phi = F + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_n \varphi_n$.

Fünfter Abschnitt.

Beispiele zu den zwei vorhergehenden Abschnitten.

§. 19.

1. Kleinste Fläche zwischen Kurve, Evolute und Krümmungshalbmesser.

I. Man soll die ebene Kurve suchen, welche zwischen zwei festen Punkten sich erstreckt und zwischen sich, den Krümmungshalbmessern an ihren Endpunkten und ihrer Evolute die kleinste Fläche einschliesst.

Ist ϱ der Krümmungshalbmesser, s der Kurvenbogen, so ist der Inhalt der Fläche:

$$\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_1} \varrho\, ds = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\, dx.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass mit wachsendem Kurvenbogen auch der Winkel beständig wächst, den der Krümmungshalbmesser mit dem ersten Krümmungshalbmesser ($x = a$) macht; dass s und x zugleich wachsen und dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ in der ganzen Ausdehnung positiv sei (oder wenigstens dasselbe Zeichen behalte). Dabei sind die Grenzwerthe von x und y fest.

Nach §. 12, I. ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0,\ f = \frac{[1+y'^2]^2}{y''}.$$

Also (§. 12, IV.)

$$\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''} = c_1; \quad \frac{4y'(1+y'^2)}{y''} + \frac{d}{dx}\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = c_1;$$

$$4y'(1+y'^2)y'' + y''^2\frac{d}{dx}\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = c_1 y''^2;$$

$$\frac{d}{dx}(1+y'^2)^2 + y''^2\left[\frac{1}{y''^2}\frac{d}{dx}(1+y'^2)^2 - \frac{2y'''}{y''^3}(1+y'^2)^2\right] = c_1 y''^2;$$

$$2\frac{d}{dx}(1+y'^2)^2 + 2(1+y'^2)^2 y''^2\frac{d}{dx}\frac{1}{y''} = c_1 y''^2,$$

$$\frac{2}{y''}\frac{d}{dx}(1+y'^2)^2 + 2(1+y'^2)^2\frac{d}{dx}\frac{1}{y''} = c_1 y'',$$

$$2\frac{d}{dx}\frac{(1+y'^2)^2}{y''} = c_1 y''; \quad \frac{(1+y'^2)^2}{y''} = \tfrac{1}{2}c_1 y' + c_2.$$

Setzt man $y' = u$:

$$(1+u^2)^2 = (\tfrac{1}{2}c_1 u + c_2)\frac{du}{dx}, \quad x = \int\frac{\frac{1}{2}c_1 u + c_2}{(1+u^2)^2}du + c_3,$$

$$y = \int y'\,dx + c_4 = \int u\frac{dx}{du}du + c_4 = \int\frac{u(\frac{1}{2}c_1 u + c_2)}{(1+u^2)^2}du + c_4.$$

Setzt man $u = cotg\,\frac{1}{2}\omega$:

$$\int\frac{\frac{1}{2}c_1 u + c_2}{(1+u^2)^2}du = -\tfrac{1}{2}\int(\tfrac{1}{2}c_1\cos\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega + c_2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega)\,d\omega$$

$$= \tfrac{1}{8}c_1\cos\omega - \frac{c_2}{4}(\omega - \sin\omega),$$

$$\int\frac{u(\frac{1}{2}c_1 u + c_2)}{(1+u^2)^2}du = -\tfrac{1}{2}\int(\tfrac{1}{2}c_1\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + c_2\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega)\,d\omega$$

$$= +\frac{c_2}{4}\cos\omega - \frac{c_1}{8}(\omega + \sin\omega).$$

Demnach

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{8}c_1\cos\omega - \tfrac{1}{4}c_2(\omega - \sin\omega) + c_3, \\ y &= -\tfrac{1}{8}c_1(\omega + \sin\omega) + \tfrac{1}{4}c_2\cos\omega + c_4, \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (a)$$

aus welchen Gleichungen ω zu eliminiren wäre, damit man die Gleichung zwischen x und y erhielte.

II. Hinsichtlich der Entscheidung, ob M. M., hat man (§. 18, VII; §. 17, I.)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} = \frac{2(1+y'^2)^2}{y''^3},$$

welche Grösse, da wir $y'' > 0$ voraussetzen, entschieden positiv ist.

(Hätten wir übrigens $y'' < 0$, so wäre $-f$ statt f in Rechnung zu stellen, und man fände dasselbe wie so eben.) Dies deutet auf ein Minimum.

Hinsichtlich der Bestimmung von V (§. 11, V.) ist

$$y = u_1,\ y' = u_2;\quad \Phi = \frac{(1+u_2^2)^2}{u_2'} + \lambda(u_1' - u_2),\quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} = \lambda,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_2'} = -\frac{(1+u_2^2)^2}{u_2'^2};\quad \lambda = z_1,\ -\frac{(1+u_2^2)^2}{u_2'^2} = z_2,\quad u_1' = u_2;$$

$$\Phi - z_1 u_1' - z_2 u_2' = \frac{(1+u^2)^2}{u_2'} + \lambda(u_1' - u_2) - u_2 z_1$$

$$+ \frac{(1+u_2^2)^2}{u_2'} = \frac{2(1+u^2)^2}{u_2'} + z_1(u_1' - u_2) - u_2 z_1$$

$$= \frac{2(1+u^2)^2}{u_2'} - z_1 u_2 = \Psi \text{ (wenn } u_2' \text{ ersetzt gedacht ist).}$$

Also ist die (D) in §. 11, V:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -u_2 \frac{\partial z}{\partial u_1} + 2(1+u_2^2)\sqrt{-\frac{\partial z}{\partial u_2}}.$$

Da x und u_1 auf der zweiten Seite nicht vorkommen, so hat man

$$z = b_1 x + b_2 u_1 + \psi,$$

wo ψ nur u_2 enthält. Daraus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = b_1,\quad \frac{\partial z}{\partial u_1} = b_2,\quad \frac{\partial z}{\partial u_2} = \frac{\partial \psi}{\partial u_2},$$

also

$$b_1 = -b_2 u_2 + 2(1+u_2^2)\sqrt{-\frac{\partial \psi}{\partial u_2}},\quad \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = -\frac{(b_1 + b_2 u_2)^2}{4(1+u_2^2)^2},$$

$$z = b_1 x + b_2 u_1 - \int \frac{(b_1 + b_2 u_2)^2}{4(1+u_2^2)^2}\,\partial u_2.$$

Demnach

$$V = b_1 x + b_2 u_1 - \int \frac{(b_1 + b_2 u_2)^2}{4(1+u_2^2)^2}\,\partial u_2.$$

Hieraus muss gezogen werden

$$\frac{\partial V}{\partial b_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial b_2} = \beta_2;$$

d. h.

$$x - \tfrac{1}{2}\int \frac{b_1 + b_2 u_2}{(1+u_2^2)^2}\,\partial u_2 = \beta_1,\quad u_1 - \tfrac{1}{2}\int \frac{u_2(b_1 + b_2 u_2)}{(1+u_2^2)^2}\,\partial u_2 = \beta_2.$$

Dies sind aber unsere obigen Gleichungen, wenn

$$b_1 = c_1, \quad \tfrac{1}{2} b_2 = c_2, \quad (\beta_1 = c_3, \; \beta_2 = c_4).$$

Ferner ist in §. 15, V., VI. ($n = 2$, $r = 1$):

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,1} c_{1,1} + \sigma_{2,1} c_{2,1} + q_{1,1} M_{1,1} &= w_{1,1} - b_{1,1},\\
\sigma_{1,2} c_{1,1} + \sigma_{2,2} c_{2,1} + q_{1,1} M_{2,1} &= w_{1,2} - b_{2,1},\\
\sigma_{1,1} c_{1,2} + \sigma_{2,1} c_{2,2} + q_{1,2} M_{1,1} &= w_{2,1} - b_{1,2},\\
\sigma_{1,2} c_{1,2} + \sigma_{2,2} c_{2,2} + q_{1,2} M_{2,1} &= w_{2,2} - b_{2,2},\\
q_{1,1} \sigma_{1,1} + q_{1,2} \sigma_{2,1} \qquad\qquad &= - p_{1,1},
\end{aligned}$$

wo

$$b_{1,1} = 0, \quad b_{1,2} = 0, \quad b_{2,1} = 0, \quad b_{2,2} = - \frac{4(1 + u_2^2) u_2}{u_2'^2};$$

$$c_{1,1} = 0, \quad c_{1,2} = c_{2,1} = 0, \quad c_{2,2} = \frac{2(1 + u_2^2)^2}{u_2'^3};$$

$$q_{1,1} = 1, \quad q_{1,2} = 0, \quad p_{1,1} = 0,$$

so dass

$$M_{1,1} = w_{1,1}, \quad M_{2,1} = w_{1,2}, \quad c_{2,2} \sigma_{2,1} = w_{2,1},$$

$$c_{2,2} \sigma_{2,2} = w_{2,2} - b_{2,2}, \quad \sigma_{1,1} = 0.$$

Der Nenner für die σ ist hiernach $c_{2,2} = \dfrac{2(1 + y'^2)^2}{y''^3}$, welche Grösse wir bereits oben betrachteten. Dieselbe darf selbstverständlich nicht Null werden innerhalb der Integrationsgrenzen (eben so wenig wie unendlich).

Die Determinante (P) in §. 18, VII. ist ($n = 2$)

$$\begin{vmatrix} \tau_{1,1}, & \tau_{2,1} \\ \tau_{1,2}, & \tau_{2,2} \end{vmatrix} = \tau_{1,1} \tau_{2,2} - \tau_{2,1} \tau_{1,2},$$

wo nun

$$\tau_{1,1} = \alpha - \frac{\partial^2 V}{\partial b_1^2} = \alpha + \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial u_2}{(1 + u_1^2)^2},$$

$$\tau_{1,2} = \tau_{2,1} = \beta - \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_2} = \beta + \tfrac{1}{2} \int \frac{u_2}{(1 + u_2^2)^2} \partial u_2,$$

$$\tau_{2,2} = \gamma - \frac{\partial^2 V}{\partial b_2^2} = \gamma + \tfrac{1}{2} \int \frac{u_2^2 \partial u_2}{(1 + u_2^2)^2}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ Konstanten.}$$

Führt man $u_2 = cotg \tfrac{1}{2} \omega$ ein:

$$\int \frac{\partial u_2}{(1 + u_2^2)^2} = \tfrac{1}{4}(\sin \omega - \omega), \quad \int \frac{u_2 \partial u_2}{(1 + u_2^2)^2} = - \tfrac{1}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega,$$

$$\int \frac{u_2^2 \partial u_2}{(1 + u_2)^2} = - \tfrac{1}{4}(\sin \omega + \omega);$$

$$\tau_{1,1}\tau_{2,2} - \tau_{1,2}\tau_{2,1} = [\alpha + \tfrac{1}{8}(\sin\omega - \omega)]\,[\gamma - \tfrac{1}{8}(\sin\omega + \omega)]$$

$$- (\beta - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega)^2 = \alpha\gamma - \beta^2 - \frac{\alpha+\gamma}{8}\,\omega - \frac{\alpha-\gamma}{8}\sin\omega$$

$$+ \tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{64}(\omega^2 - 4\sin^2\tfrac{1}{2}\omega),$$

wo nun α, β, γ immer so bestimmt werden können, dass diese Grösse nicht Null ist innerhalb beliebiger Grenzen.

III. Wir nahmen y an den beiden Grenzen fest an (d. h. u_1), nicht aber y' (u_2). Demnach müssen die vier Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 noch so bestimmt werden, dass

$$\int_a^b \Phi\, dx = Min., \; y \text{ gegeben an den Grenzen;}$$

heissen wir also y, als Funktionen der $c_1, \ldots, c_4$ an den beiden Grenzen η, ζ; so ist

$$\int_a^b \Phi\, dx + k_1(\eta - \alpha) + k_1(\zeta - \beta) \text{ zu differenziren,}$$

wo α, β unveränderliche Zahlen sind. Da

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1'} = \lambda, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u_2'} = -\frac{(1+u_2^2)^2}{u_2'^2},$$

so ist (§. 11, III; §. 18, IX):

$$\mathop{Z}_{x=a}^{x=b}\left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial c} - \frac{(1+u_2^2)^2}{u_2'^2}\frac{\partial u_2}{\partial c}\right) + k_1\frac{\partial\eta}{\partial c} + k_2\frac{\partial\zeta}{\partial c} = 0,$$

wo c durch c_1, c_2, c_3, c_4 zu ersetzen ist. Da

$$\frac{\partial\eta}{\partial c} = \mathop{Z}^{x=a}\frac{\partial u_1}{\partial c}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial c} = \mathop{Z}^{x=b}\frac{\partial u_1}{\partial c},$$

so heisst diese Gleichung auch

$$-\mathop{Z}_{x=a}^{x=b}\frac{(1+u_2^2)^2}{u_2'^2}\frac{\partial u_2}{\partial c} + (k_2 + \lambda_b)\frac{\partial\zeta}{\partial c} + (k_1 - \lambda_a)\frac{\partial\eta}{\partial c} = 0,$$

wo λ_a, λ_b die Werthe von λ für $x = a$, $x = b$ sind. Dabei ist

$$\frac{(1+u_2^2)^2}{u_2'^2} = \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = \xi \text{ eine Funktion von } x,$$

so dass

$$-\xi_b\left(\frac{\partial u_2}{\partial c}\right)_b + \xi_a\left(\frac{\partial u_2}{\partial c}\right)_a + (k_2 + \lambda_b)\frac{\partial\zeta}{\partial c} + (k_1 - \lambda_a)\frac{\partial\eta}{\partial c} = 0,$$

mit welchen vier Gleichungen dann noch $\eta = \alpha$, $\zeta = \beta$ zu verbinden sind. Aus den eben genannten Gleichungen, in denen ξ_b, ξ_a, $k_2 + \lambda_b$, $k_1 - \lambda_a$ dieselben Werthe beibehalten, folgen sofort

$$\xi_b = 0, \quad \xi_a = 0, \quad k_2 + \lambda_b = 0, \quad k_1 - \lambda_a = 0,$$

von welchen zwei Gleichungen die letzten für uns ohne Bedeutung sind; die zwei ersten aber heissen

$$\frac{\frac{1}{2}c_1 y' + c_2}{y''} = 0 \text{ an beiden Grenzen.}$$

Da wir nun offenbar nicht $c_1 = c_2 = 0$ setzen können, so muss y'' unendlich sein an den Grenzen, d. h. da $y' = cotg \frac{1}{2}\omega$:

$$\frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\omega} \frac{d\omega}{dx} = \infty \text{ an beiden Grenzen.}$$

Dies fordert, dass $\sin^2 \frac{1}{2}\omega = 0$, also $\omega = 0$ und 2π sei; demnach geht in (a) ω von 0 bis 2π. Setzt man nun noch $a = 0$, b bekannt, $y = \alpha$ für $x = 0$, $y = \beta$ für $x = b$:

$$0 = \tfrac{1}{8}c_1 + c_3, \quad \alpha = \tfrac{1}{4}c_2 + c_4; \quad b = \tfrac{1}{8}c_1 - \tfrac{1}{2}c_2\pi + c_3,$$
$$\beta = -\tfrac{1}{4}c_1\pi + \tfrac{1}{4}c_2 + c_4,$$

woraus c_1, c_2, c_3, c_4 folgen. Lässt man (was offenbar gestattet ist) die Abszissenaxe durch die festen Punkte gehen, so ist $\alpha = \beta = 0$, also

$$0 = \tfrac{1}{8}c_1 + c_3, \quad 0 = \tfrac{1}{4}c_2 + c_4, \quad b = \tfrac{1}{8}c_1 - \tfrac{1}{2}c_2\pi + c_3,$$
$$0 = -\tfrac{1}{4}c_1\pi + \tfrac{1}{4}c_2 + c_4;$$

woraus

$$c_1 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_2 = -\frac{2b}{\pi}, \quad c_4 = -\tfrac{1}{4}c_2 = \frac{b}{2\pi};$$

also

$$x = \frac{b}{2\pi}(\omega - \sin\omega), \quad y = \frac{b}{2\pi}(1 - \cos\omega) \quad . \; . \; (a')$$

eine Zykloide in der gewöhnlichen Lage.

2. Kürzeste Linie im Raume.

IV. Hier ist (bei festen Grenzen):

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

wo nun die Formeln des §. 13, I. anzuwenden sind. Wir wollen aber nach der allgemeinen Theorie des §. 10 verfahren, wo

$$u_1 = y, \quad u_2 = z;$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}; \quad f(\varrho) = \sqrt{\varrho}.$$

Also (§. 10, II.)

$$\frac{\partial f}{\partial u_1'} = c_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2'} = c_2; \quad u_1 = C_1 x + C_2, \quad u_2 = C_3 x + C_4,$$

d. h. die Kurve ist eine Gerade.

Nach §. 11, IV. wäre

$$\Phi = \sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} = \frac{u_1'}{\sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_2'} = \frac{u_2'}{\sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}}; \quad \frac{u_1'}{\sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}} = z_1,$$

$$\frac{u_2'}{\sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}} = z_2; \quad \Phi - z_1 u_1' - z_2 u_2' = \sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}$$

$$- \frac{u_1'^2 + u_2'^2}{\sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}} = \sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2} = \Psi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2}.$$

Setzt man

$$z = b_1 u_1 + b_2 u_2 + cx,$$

so ist

$$c = \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}; \quad V = b_1 u_1 + b_2 u_2 + x\sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2},$$

woraus

$$u_1 - \frac{b_1 x}{(1 - b_1^2 - b_2^2)^{1/2}} = \beta_1, \quad u_2 - \frac{b_2 x}{(1 - b_1^2 - b_2^2)^{1/2}} = \beta_2,$$

wie oben.

V. In §. 16, III. ist

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1'^2} = \frac{1 + u_2'^2}{(1 + u_1'^2 + u_2'^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2'^2} = \frac{1 + u_1'^2}{(1 + u_1'^2 + u_2'^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1' \partial u_2'} = - \frac{u_1' u_2'}{(1 + u_1'^2 + u_2'^2)^{3/2}},$$

und (§. 17, II.)

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1' \partial u_2'}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1'^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2'^2} = \frac{u_1'^2 u_2'^2 - (1 + u_1'^2)(1 + u_2'^2)}{1 + u_1'^2 + u_2'^2},$$

welche Grösse negativ ist. Dann ist

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1'^2} \text{ oder } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2'^2} \text{ immer positiv,}$$

so dass ein Minimum zu erwarten ist.

Die (f) in §. 15 sind

$$b_{1,1} + \sigma_{1,1} c_{1,1} + \sigma_{2,1} c_{2,1} = w_{1,1}, \; b_{2,1} + \sigma_{1,2} c_{1,1} + \sigma_{2,2} c_{2,1} = w_{1,2},$$
$$b_{1,2} + \sigma_{1,1} c_{1,2} + \sigma_{2,1} c_{2,2} = w_{2,1}, \; b_{2,2} + \sigma_{1,2} c_{1,2} + \sigma_{2,2} c_{2,2} = w_{2,2},$$

wo nun (§. 14, II.)

$$b_{1,1} = 0, \quad b_{1,2} = 0, \quad b_{2,1} = 0, \quad b_{2,2} = 0;$$
$$c_{1,1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1' \partial u_1'}, \quad c_{1,2} = c_{2,1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1' \partial u_2'}, \quad c_{2,2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1' \partial u_2'},$$

so dass die hier auftretende Bedingung, es dürfe der Nenner der σ nicht Null sein, bereits erfüllt ist.

Die Determinante (P) in §. 16, VI. ist

$$\tau_{1,1}\tau_{2,2} - (\tau_{1,2})^2 = \left(h_{1,1} - \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_1}\right)\left(h_{2,2} - \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial b_2}\right) - \left(h_{1,2} - \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_2}\right)^2,$$

und es ist aus dem Werthe von V sofort klar, dass man die h immer so bestimmen kann, dass diese Grösse nicht Null ist.

VI. Besondere Fälle der kürzesten Linie.

1. Sind die Endpunkte fest, so ist die Aufgabe erledigt und man hat ein Minimum.

2. Seien nur die Grenzwerthe von x gegeben, also die kürzeste Kurve zu suchen zwischen zwei Ebenen, die senkrecht auf der x-Axe stehen.

Jetzt sind die vier Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4 so zu bestimmen, dass

$$\int_a^b \Phi\, dx, \quad \Phi = \sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2}$$

ein Minimum wird. Daraus (§. 10, III.):

$$\mathop{Z}_{x=a}^{x=b}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1'}\frac{\partial u_1}{\partial C} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2'}\frac{\partial u_2}{\partial C}\right) = 0,$$

oder da

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1'} = \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_2'} = \frac{C_3}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}};$$

es muss ($C = C_1, C_2, C_3, C_4$)

$$C_1 (b - a) = 0, \; C_1 = 0, \; C_3 (b - a) = 0, \; C_3 = 0; \; C_1 = C_3 = 0.$$

Die Konstanten C_2, C_4 bleiben ganz willkürlich, und die Gleichungen der Kurve sind:

$$y = C_2, \quad z = C_4,$$

wie natürlich jede mit der x-Axe parallele Gerade.

3. Sei ein fester Punkt ($x = a$) und eine Grenzkurve

$$\varphi (x, y, z) = 0, \quad \psi (x, y, z) = 0$$

gegeben. Jetzt sind x_2 und die vier Konstanten so zu bestimmen, dass man

$$\int_a^{x_2} \Phi dx + k_1 \varphi (x_2, \eta, \zeta) + k_2 \psi (x_2, \eta, \zeta) + k_3 (C_1 a + C_2 - \alpha)$$
$$+ k_4 (C_3 a + C_4 - \beta)$$

nach den fünf Grössen differenzirt, wobei

$$\eta = C_1 x_2 + C_2, \; \zeta = C_3 x_2 + C_4; \; \Phi = \sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2} \, {}^{*}).$$

Daraus

$$\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2} + k_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} C_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} C_3\right) + k_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} C_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} C_3\right) = 0,$$

$$\frac{C_1 (x_2 - a)}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} x_2 + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} x_2 + k_3 a = 0,$$

$$k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + k_3 = 0,$$

$$\frac{C_3 (x_2 - a)}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} x_2 + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} x_2 + k_4 a = 0,$$

$$k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + k_4 = 0.$$

---

*) Natürlich könnte man mittelst der Bedingungsgleichungen

$$\alpha = C_1 a + C_2, \quad \beta = C_3 a + C_4$$

etwa C_2, C_4 ausdrücken und in die Grenzgleichungen einsetzen, worauf dann nur noch x_2, C_1, C_3 zu suchen wären. Derartige Bemerkungen lassen sich bei jedem einzelnen Falle machen, sind aber so elementarer Natur, dass wir in der Regel davon absehen.

Also

$$\frac{C_1 (x_2 - a)}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}} - k_3 (x_2 - a) = 0, \quad \frac{C_3 (x_2 - a)}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}} - k_4 (x_2 - a) = 0,$$

welche Gleichungen k_3, k_4 bestimmen, so dass

$$k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = - \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}},$$

$$k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = - \frac{C_3}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}},$$

nebst der ersten Gleichung, aus welcher folgt

$$\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{C_1^2}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}} - \frac{C_3^2}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}} = 0,$$

$$k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = - \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}}.$$

Die Elimination von k_1, k_2 liefert:

$$C_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + C_3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0,$$

welche Gleichung aussagt, dass die Gerade auf der Grenzkurve senkrecht steht.

Dasselbe ergibt sich für zwei Grenzkurven.

3. Kurve, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

VII. Unter allen durch zwei feste Punkte im Raume gehenden gleich langen Kurven diejenige zu suchen, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Ist L die Kurvenlänge, die xy-Ebene horizontal, so ist die Ordinate des Schwerpunktes

$$\frac{1}{L} \int_a^b z \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

und $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$

Also (§. 10, IV.; §. 13, I.):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dy}\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = 0;$$

$$\Phi = z\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + C\sqrt{1 + y'^2 + z'^2};$$

d. h.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = c_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = 0.$$

Aber

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'} y'' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} z'',$$

$$z' \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{d\Phi}{dx} - y'' \frac{\partial \Phi}{\partial y'} - z'' \frac{\partial \Phi}{\partial z'};$$

$$z' \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial z'} - \frac{d\Phi}{dx} + y'' \frac{\partial \Phi}{\partial y'} + z'' \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(z' \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\right) - \frac{d\Phi}{dx} + c_1 y'' = 0,$$

$$z' \frac{\partial \Phi}{\partial z'} - \Phi + c_1 y' = c_2;$$

d. h.

$$\frac{(z + C) z'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - (z + C)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + c_1 y' = c_2;$$

$$\frac{-(z + C)(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + c_1 y' = c_2.$$

Folglich

$$\frac{(z + C) y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c_1, \quad c_1 y' - \frac{(z + C)(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c_2,$$

woraus

$$c_1 y' - \frac{(1 + y'^2) c_1}{y'} = c_2, \quad - c_1 = c_2 y', \quad c_3 - c_1 x = c_2 y.$$

Dies ist aber die Gleichung einer vertikalen Ebene, in der mithin die Kurve liegt, so dass wir die Aufgabe des §. 9, IV. vor uns haben.

4. Kurve von gegebener Länge auf einer krummen Fläche, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

VIII. Auf einer krummen Oberfläche, deren Gleichung $v = 0$ sei, wo v eine gegebene Funktion von x, y, z ist, wird ein Faden

von gegebener Länge L gespannt. Man soll seine Lage bestimmen, wenn der Schwerpunkt des Fadens (Kurve) am tiefsten liegt.

Die Axe der z sei vertikal im Sinne der Schwere gerichtet. Dann ist die Ordinate des Schwerpunktes

$$\frac{1}{L}\int_{x_1}^{x_2} z\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \text{ während } L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx.$$

Demnach hat man (§. 13, II.)

$$\Phi = z\sqrt{1+y'^2+z'^2} + a\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda v;$$

und

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial y'} = 0, \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial z'} = 0;\ v = 0.$$

$$\lambda\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{(z+a)\,y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0,$$

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{(z+a)\,z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0,$$

oder auch (§. 13, V.)

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{d}{dx}\frac{(z+a)\,z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$
$$+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{d}{dx}\frac{(z+a)\,y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0,\ v = 0 \quad \ldots\ldots \text{(c)}$$

woraus y, z mit zwei willkürlichen Konstanten.

Hinsichtlich der Entscheidung, ob M. M. tritt jetzt der Fall des §. 17, IV. ein, wo

$$f = z\sqrt{1+y'^2+z'^2} + a\sqrt{1+y'^2+z'^2},\ \varphi = v;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{(z+a)(1+z'^2)}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} = \frac{(z+a)(1+z'^2)}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'} = -\frac{(z+a)\,y'z'}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}},$$

so dass das Zeichen von

$$(z+a)\left[(1+z'^2)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + 2y'z'\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z} + (1+y'^2)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

entscheidet. Diese Grösse ist aber

$$(z+a)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(z'\frac{\partial v}{\partial z} + y'\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right],$$

also von demselben Zeichen wie $z + a$ (vergl. §. 9, IV.).

IX. Seien zwei Grenzkurven (auf der Oberfläche) gegeben, deren Gleichungen seien an der

unteren Grenze $(x = x_1) : \varphi = 0, \; v = 0;$

oberen Grenze $(x = x_2) : \psi = 0, \; v = 0$ *).

Da aber $v = 0$ an beiden Grenzen identisch erfüllt ist, so gilt diese Gleichung nicht als eigentliche Bedingungsgleichung. Man hat also (§. 10, III.; Note zu §. 18, IX.):

$$\overset{x=x_2}{\underset{x=x_1}{\mathbf{Z}}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial c}\right) + k_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial c} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1}\frac{\partial \zeta_1}{\partial c}\right)$$
$$+ k_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial c} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial c}\right) = 0,$$

wo η_1, η_2 die Werthe von y; ζ_1, ζ_2 von z an den beiden Grenzen sind und $c = c_1, c_2$ ist. Daneben noch

$$\overset{x=x_2}{\mathbf{Z}}\Phi + k_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2}\right) = 0,$$
$$-\overset{x=x_1}{\mathbf{Z}}\Phi + k_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen, nebst $\varphi = 0$, $\psi = 0$, folgen c_1, c_2, x_1, x_2, k_1, k_2. Dazu ist dann noch ganz allgemein

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c} = 0, \; \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}y' + \frac{\partial v}{\partial z}z' = 0.$$

So erhält man nun für die obere Grenze:

$$\Phi + k_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}y' + \frac{\partial \psi}{\partial z}z'\right) = 0, \; \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}y' + \frac{\partial v}{\partial z}z' = 0;$$

für die untere Grenze:

$$-\Phi + k_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z}z'\right) = 0, \; \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}y' + \frac{\partial v}{\partial z}z' = 0.$$

Da überdies

$$\overset{x=x_2}{\mathbf{Z}}\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial \eta_2}{\partial c}, \; \overset{x=x_1}{\mathbf{Z}}\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial \eta_1}{\partial c}, \text{ u. s. w.,}$$

---

*) Dass hier die Bedingungsgleichung $v = 0$ zugleich als Grenzgleichung auftritt, entspricht der Bemerkung am Schlusse von §. 11, III. Jede Kurve, die als Grenzkurve gelten soll, muss nothwendig $v = 0$ zu einer ihrer Gleichungen haben, da sonst ja, weil diese Gleichung jedenfalls gilt, noch zwei weitere Gleichungen an der Grenze gegeben, die drei Koordinaten also fest wären.

so liefern die ersten zwei Gleichungen:

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)_2 + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta_2}\right] \frac{\partial \eta_2}{\partial c} + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z'}\right)_2 + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_2}\right] \frac{\partial \zeta_2}{\partial c}$$
$$+ \left[-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)_1 + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1}\right] \frac{\partial \eta_1}{\partial c} + \left[-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z'}\right)_1 + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1}\right] \frac{\partial \zeta_1}{\partial c} = 0,$$

wo nun

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial c} \frac{\partial v}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial c} \frac{\partial v}{\partial \eta_1} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial c} \frac{\partial v}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial \eta_2}{\partial c} \frac{\partial v}{\partial \eta_2} = 0.$$

Zieht man hieraus $\frac{\partial \zeta_1}{\partial c}$, $\frac{\partial \zeta_2}{\partial c}$, um sie oben einzusetzen, und lässt dann $c = c_1$, c_2 sein, so erhält man sofort die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z'} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \frac{\partial v}{\partial y} \text{ an der oberen Grenze;}$$
$$\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y'} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z'} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \frac{\partial v}{\partial y} \text{ „ „ unteren „}$$

In Verbindung mit den früheren Gleichungen ergibt sich nun:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial z} z'\right)$$
$$- \Phi \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \text{ an der oberen Grenze und}$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'\right)$$
$$- \Phi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \text{ an der unteren Grenze.}$$

Dabei ist (da v kein y', z' enthält)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{(z + a) y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{(z + a) z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$
$$\Phi = (z + a) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

so dass an der oberen Grenze:

$$\left(y' \frac{\partial v}{\partial z} - z' \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial z} z'\right)$$
$$- (1 + y'^2 + z'^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist

$$y' \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + z' \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$+ y' \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + y' \frac{\partial v}{\partial y} + z' \frac{\partial v}{\partial z}\right) + z' \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - y' \frac{\partial v}{\partial y} - z' \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0,$$

oder wegen der Bedeutung von v:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + y'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$+ z'\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die gesuchte Kurve auf der betreffenden Grenzkurve senkrecht steht. Dasselbe gilt offenbar eben so für die andere Grenzkurve. Man wird bemerken, dass ein grosser Theil der hier geführten Rechnung ganz allgemeiner Natur ist, also in ähnlichen Fällen das Ergebniss sofort wird benutzen können.

5. Kürzeste Kurve, wenn die Normalebenen durch den Koordinatenanfang gehen.

X. Es soll eine Kurve (im Raume) gesucht werden, deren Länge ein Minimum ist, während alle ihre Normalebenen durch den Koordinatenanfang gehen.

Die Gleichung einer Normalebene ist

$$X - x + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0,$$

wenn X, Y, Z die laufenden Koordinaten sind. Also muss

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx \text{ ein Minimum, und } x + yy' + zz' = 0$$

sein.

Hiernach ist (§. 13, II.)

$$\Phi = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda\,(x + yy' + zz');$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial y'} = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial z'} = 0;$$
$$\lambda y' - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \lambda y\right) = 0,$$
$$\lambda z' - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \lambda z\right) = 0,$$

oder

$$y\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$
$$z\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,\ x + yy' + zz' = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{d\lambda}{dx}$:

$$z \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = y \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{yz' - zy'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0;$$

$$\frac{yz' - zy'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c_1, \; yz' - zy' = c_1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

woraus

$$y^2 z'^2 - 2yzy'z' + z^2 y'^2 = c_1^2 (1 + y'^2 + z'^2),$$

$$y^2 y'^2 + 2yzy'z' + z^2 z'^2 = x^2,$$

$$y^2(y'^2 + z'^2) + z^2(y'^2 + z'^2) = x^2 + c_1^2 (1 + y'^2 + z'^2),$$

$$(y^2 + z^2)(y'^2 + z'^2) = x^2 + c_1^2 (1 + y'^2 + z'^2),$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(y'^2 + z'^2) = x^2 (1 + y'^2 + z'^2) + c_1^2 (1 + y'^2 + z'^2),$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1 + y'^2 + z'^2) = (x^2 + c_1^2)(1 + y'^2 + z'^2) + x^2 + y^2 + z^2.$$

Dann aber folgt aus der Bedingungsgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2,$$

also

$$(c_2 - x^2 - c_1^2)(1 + y'^2 + z'^2) = c_2, \; 1 + y'^2 + z'^2 = \frac{c_2}{c_2 - x^2 - c_1^2};$$

$$yz' - zy' = c_1 \sqrt{\frac{c_2}{c_2 - x^2 - c_1^2}},$$

$$\frac{yz' - zy'}{y^2 + z^2} = \frac{c_1}{c_2 - x^2} \sqrt{\frac{c_2}{c_2 - x^2 - c_1^2}},$$

d. h.

$$arc\left(tg = \frac{z}{y}\right) + c_3 = c_1 \sqrt{c_2} \int \frac{dx}{(c_2 - x^2)\sqrt{c_2 - x^2 - c_1^2}}$$

$$= \pm \frac{c_1 \sqrt{c_2}}{c_1 \sqrt{c_2}} \, arc\left(tg = \frac{\sqrt{c_2}\sqrt{c_2 - x^2 - c_1^2}}{c_1 x}\right),$$

$$arc\left(tg = \frac{z}{y}\right) + c_3 = \pm \, arc\left(tg = \frac{\sqrt{c_2}\sqrt{c_2 - x^2 - c_1^2}}{c_1 x}\right),$$

$$\frac{z}{y} = \frac{\pm \frac{\sqrt{c_2}\sqrt{c_2 - x^2 - c_1^2}}{c_1 x} - tg\, c_3}{1 \pm tg\, c_3 \frac{\sqrt{c_2}\sqrt{c_2 - x^2 - c_1^2}}{c_1 x}},$$

woraus

$$\pm \frac{\sqrt{c_2}\sqrt{c_2 - x^2 - c_1^2}}{c_1 x} = \frac{z + y\, tg\, c_3}{y - z\, tg\, c_3},$$

$$\frac{c_2(c_2 - x^2 - c_1^2)}{c_1^2 x^2} + 1 = \frac{(y^2 + z^2)(1 + tg^2 c_3)}{(y - z\, tg\, c_3)^2} = \frac{(c_2 - c_1^2)(c_2 - x^2)}{c_1^2 x^2},$$

so dass

$$\frac{(c_2 - c_1^2)(c_2 - x^2)}{c_1^2 x^2} = \frac{c_2 - x^2}{(y \cos c_3 - z \sin c_3)^2},$$

$$\pm \frac{c_1 x}{\sqrt{c_2 - c_1^2}} = y \cos c_3 - z \sin c_3.$$

Die Gleichungen,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2,\ y \cos c_3 - z \sin c_3 = \pm \frac{c_1 x}{\sqrt{c_2 - c_1^2}}$$

bestimmen zunächst die Kurve, die ein Kreis ist. Die vierte Konstante tritt bei der Bestimmung von λ ein. Da aber diese vierte Konstante nicht in die Werthe von y, z eintritt, so ist die Aufgabe mit beliebigen Grenzbedingungen nicht eigentlich lösbar *).

6. Kurve von gegebener Länge, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt, bei bestimmter Neigung gegen eine Vertikalebene.

XI. Es soll eine (räumliche) Kurve von der Länge L gesucht werden so, dass ihr Schwerpunkt von der horizontalen Ebene der xy in möglich weitester Entfernung sich befinde, zugleich aber die Tangente ihres Neigungswinkels gegen die xz-Ebene unveränderlich sei.

Die Tangente dieses Neigungswinkels ist

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + z'^2}},\ \text{also } y' = \alpha \sqrt{1 + z'^2}.$$

Dann (§. 13)

---

*) Es ist hier der in der Note zu §. 11, IV. berührte Fall vorhanden, da die (eine) Bedingungsgleichung geradezu integrirbar ist (sie heisst in den dortigen Zeichen: $x + u_1 u_1' + u_2 u_2' = 0$). Dadurch werden für etwaige Grenzbedingungen Einschränkungen entstehen. Sind x_1, η_1, ζ_1 die Koordinaten des Anfangspunktes, x_2, η_2, ζ_2 des Endpunktes, so muss in diesem Falle $x_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = x_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$ sein, so dass von den vier Grössen η_1, ζ_1, η_2, ζ_2 nur drei willkürlich gewählt werden können.

c_1 ist das Quadrat des Halbmessers einer Kugel, auf der die ganze Kurve, und also natürlich auch ihre Endpunkte sein müssen.

$$\Phi = z\sqrt{1+y'^2+z'^2} + a\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda\left(y' - \alpha\sqrt{1+z'^2}\right);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = 0,\ y' = \alpha\sqrt{1+z'^2}.$$

$$\frac{(z+a)\,y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \lambda = c_1;$$

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{(z+a)\,z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{\lambda\alpha z'}{\sqrt{1+z'^2}}\right] = 0.$$

Es ist aber

$$\alpha^2(1+z'^2) = y'^2,\ 1+y'^2+z'^2 = (1+z'^2)(1+\alpha^2),$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{\alpha\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+z'^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$\lambda = c_1 - \frac{(z+a)\,\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

$$\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+z'^2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{(z+a)\,z'}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+z'^2}} - \frac{c_1\,\alpha z'}{\sqrt{1+z'^2}}\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2(a+z)\,z'}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+z'^2}}\right] = 0,$$

$$(1+\alpha^2)\sqrt{1+z'^2} - \frac{d}{dx}\left[\frac{z'(z+a)(1+\alpha^2) - c_1\alpha z'\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+z'^2}}\right] = 0.$$

Diese Gleichung, welche des zweiten Grades nach z ist, führt zwei Konstanten ein, und da dann z bekannt ist, so führt die Integration von

$$y' = \alpha\sqrt{1+z'^2}$$

noch die vierte Konstante ein, und es werden jetzt alle vier Konstanten in die Werthe von y, z eintreten. λ ist dann durch diese Werthe ebenfalls bestimmt.

Man kann übrigens auch wie in VII. verfahren und hat offenbar eben so

$$z'\frac{\partial \Phi}{\partial z'} - \Phi + c_1 y' = c_2;$$

$$\frac{(z+a)\,z'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{\lambda\alpha z'^2}{\sqrt{1+z'^2}} - (z+a)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$
$$-\lambda\left(y' - \alpha\sqrt{1+z'^2}\right) + c_1 y' = c_2,$$

oder wenn man c_1 zurücksetzt:

$$\frac{(z+a)\,z'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{\lambda\alpha z'^2}{\sqrt{1+z'^2}} + \frac{(z+a)\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

$$-(z+a)\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda\alpha\sqrt{1+z'^2} = c_2,$$

$$-\frac{z+a}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1+z'^2}} = c_2;$$

$$-\frac{z+a}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \left(c_1 - \frac{(z+a)\,\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\frac{\alpha}{\sqrt{1+z'^2}} = c_2;$$

$$\frac{-(z+a)}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+z'^2}} + \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1+z'^2}} - \frac{(z+a)\,\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+z'^2}} = c_2;$$

$$c_1\alpha - (z+a)\sqrt{1+\alpha^2} = c_2\sqrt{1+z'^2},$$

$$z'^2 = \frac{1}{c_2^2}\,[c_1\alpha - (z+a)\sqrt{1+\alpha^2}]^2 - 1;$$

$$z' = \pm\frac{1}{c_2}\sqrt{(c_1\alpha - a\sqrt{1+\alpha^2} - z\sqrt{1+\alpha^2})^2 - c_2^2};$$

$$\pm\int\frac{c_2\,dz}{\sqrt{(c_1\alpha - a\sqrt{1+\alpha^2} - z\sqrt{1+\alpha^2})^2 - c_2^2}} = x + c_3,$$

$$\mp\frac{c_2}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, l\left[c_1\alpha - (a+z)\sqrt{1+\alpha^2}\right.$$

$$\left. + \sqrt{(c_1\alpha - a\sqrt{1+\alpha^2} - z\sqrt{1+\alpha^2})^2 - c_2^2}\right] = x + c_3,$$

woraus

$$c_1\alpha - (a+z)\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{C}{2}\,e^{\pm\frac{x\sqrt{1+\alpha^2}}{c_2}} + \frac{c_2^2}{2C}\,e^{\mp\frac{x\sqrt{1+\alpha^2}}{c_2}},$$

oder wenn

$$C = c_2\,e^{\mp c_3\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{c_2}}:$$

$$c_1\alpha - (a+z)\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{c_2}{2}\,e^{\pm(x-c_3)\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{c_2}} + \frac{c_2}{2}\,e^{\mp(x-c_3)\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{c_2}}.$$

Demnach kann man setzen

$$c\alpha - (a+z)\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}} + e^{-\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}}\right),$$

wo c, h, k drei willkürliche Konstanten sind und wo

$$\frac{(z+a)\,y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \lambda = c.$$

Hieraus

$$-z'\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}} - e^{-\frac{x+k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$$

$$1 + z'^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}} + e^{-\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2,$$

$$y' = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}} + e^{-\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}}\right),$$

$$y = \frac{\alpha h}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\left(e^{\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}} - e^{-\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}}\right) + c'.$$

Demnach sind die Gleichungen der Kurve:

$$\left.\begin{aligned} z\sqrt{1+\alpha^2} &= c\alpha - a\sqrt{1+\alpha^2} - \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}} + e^{-\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \\ y\sqrt{1+\alpha^2} &= \frac{\alpha h}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}} - e^{-\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}}\right) + c' \;.\;.\;. \end{aligned}\right\}(c)$$

Für $\alpha = 0$ ergibt sich hieraus die Formel (e) in §. 9, IV., *wie sich* gehört.

XII. Hinsichtlich der Entscheidung, ob M. M., hat man in §. 16, III.: $u_1 = y$, $u_2 = z$; $\varphi = u_1' - \alpha\sqrt{1+u_2'^2}$; $n = 2$; also

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{s=1}^{s=2}\sum_{t=1}^{t=2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_s' \partial u_t'} P_s P_t \, dx,$$

$$\Phi = (a + u_2)\sqrt{1 + u_1'^2 + u_2'^2} + \lambda\left(u_1' - \alpha\sqrt{1+u_2'^2}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1'} P_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2'} P_2 = 0.$$

Also

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1'^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2'}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1'\partial u_2'}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1'}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2'} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_2'^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1'}\right)^2\right] P^2 \frac{dx}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2'}\right)^2},$$

so dass das Zeichen der in den eckigen Klammern stehenden Grösse entscheidet. Aber

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1'^2} = \frac{(a+u_2)(1+u_2'^2)}{(1+u_1'^2+u_2'^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_2'^2} = \frac{(a+u_2)(1+u_1'^2)}{(1+u_1'^2+u_2'^2)^{3/2}} - \frac{\lambda\alpha}{(1+u_2'^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1' \partial u_2'} = -\frac{(a+u_2)u_1'u_2'}{(1+u_1'^2+u_2'^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_1'} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2'} = -\frac{\alpha u_2'}{\sqrt{1+u_2'^2}};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1'^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2'}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1' \partial u_2'}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1'}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2'} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2'^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1'}\right)^2$$

$$= \frac{(a+z)}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}\left[\alpha^2 z'^2 - \frac{2\alpha y' z'^2}{\sqrt{1+z'^2}} + 1 + y'^2\right] - \frac{\lambda \alpha}{(1+z'^2)^{3/2}}.$$

Aber $y' = \alpha\sqrt{1+z'^2}$, $\alpha^2 z'^2 - \frac{2\alpha y' z'^2}{\sqrt{1+z'^2}} + 1 + y'^2 = \alpha^2 z'^2 - 2\alpha^2 z'^2 + 1 + \alpha^2 + \alpha^2 z'^2 = 1 + \alpha^2$, und wenn

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}} + e^{-\frac{x-k}{h}\sqrt{1+\alpha^2}}\right) = \varrho:$$

$$\sqrt{1+z'^2} = \varrho, \quad 1 + y'^2 + z'^2 = (1+\alpha^2)\varrho^2,$$

$$\frac{1}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}(\alpha^2 z'^2 - \cdot\cdot) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}\,\varrho^3},$$

so dass obige Grösse

$$\frac{(a+z)}{\varrho^3\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{\lambda\alpha}{\varrho^3} = \frac{1}{\varrho^3}\left(\frac{a+z}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \lambda\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{\varrho^3}\left(\frac{a+z}{\sqrt{1+\alpha^2}} - c\alpha + \frac{(a+z)\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) = \frac{1}{\varrho^3}\left[(a+z)\sqrt{1+a^2} - c\alpha\right]$$

$$= -\frac{h}{\varrho^2}.$$

Da wir ein Maximum haben sollen, so muss $h > 0$ sein.

XIII. Seien nun zwei Grenzkurven gegeben:

$$\varphi_1 = 0, \ \psi_1 = 0 \text{ für } x = x_1; \quad \varphi_2 = 0, \ \psi_2 = 0 \text{ für } x = x_2.$$

Jetzt hat man x_1, x_2, c, c', h, k so zu bestimmen, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi\, dx = Max.,$$

und obige Gleichungen erfüllt sind.

Haben η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 die Bedeutnng in IX., so ist, wenn Φ_1, Φ_2 die Werthe von Φ an den zwei Grenzen:

$$\Phi_2 + k_3\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta_2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2}\right)$$
$$+ k_4\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta_2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2}\right) = 0,$$

$$-\Phi_1 + k_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x_1}\right)$$
$$+ k_2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x_1}\right) = 0,$$

$$\overset{x=x_2}{\underset{x=x_1}{Z}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial\mu} + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)$$
$$+ k_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\mu} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\mu}\right) + k_2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\mu} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\mu}\right)$$
$$+ k_3\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\mu} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta_2}\frac{\partial\zeta_2}{\partial\mu}\right) + k_4\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\mu} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2}\frac{\partial\zeta_2}{\partial\mu}\right) = 0,$$

wo $\mu = c, c', h, k$ und wo der erste Theil

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial\mu}\overset{x=x_2}{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial y'} + \frac{\partial\zeta_2}{\partial\mu}\overset{x=x_2}{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial z'} - \frac{\partial\eta_1}{\partial\mu}\overset{x=x_1}{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial y'} - \frac{\partial\zeta_1}{\partial\mu}\overset{x=x_1}{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial z'}.$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung, so nimmt sie die Gestalt an

$$M_1\frac{\partial\eta_2}{\partial\mu} + M_2\frac{\partial\zeta_2}{\partial\mu} + M_3\frac{\partial\eta_1}{\partial\mu} + M_4\frac{\partial\zeta_1}{\partial\mu} = 0,$$

wo nun M_1, M_2, M_3, M_4 dieselben bleiben, wenn $\mu = c, c', h, k$ gesetzt wird. Daraus folgt sofort, dass diese Grössen Null sind, d. h.

$$k_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_1} + k_2\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta_1} = \overset{x=x_1}{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial y'},\quad k_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_1} + k_2\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1} = \overset{x=x_1}{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial z'},$$

$$k_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta_2} + k_4\frac{\partial\psi_2}{\partial\eta_2} = -\overset{x=x_2}{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial y'},\quad k_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta_2} + k_4\frac{\partial\psi_2}{\partial\zeta_2} = -\overset{x=x_2}{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial z'}.$$

Daraus folgt dann, dass die Elimination von k_1, k_2 zwischen diesen und der zweiten unserer Gleichungen dasselbe gibt, wie von k_3, k_4 aus der ersten. Also man hat für die zweite Grenze ($x = x_2$, $y = \eta_2$, $z = \zeta_2$):

$$\Phi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z'\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}y' + \frac{\partial\psi}{\partial z}z'\right) = 0,$$

$$\left(\Phi - y'\frac{\partial\Phi}{\partial y'} - z'\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$-\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0.$$

Aber

$$\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'} - z'\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{a+z}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{\lambda \alpha}{\sqrt{1+z'^2}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{(a+z)y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \lambda, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{(a+z)z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{\lambda \alpha z'}{\sqrt{1+z'^2}},$$

$$\frac{\lambda \alpha y'}{\sqrt{1+z'^2}} = \lambda \alpha^2,$$

so dass die gesuchte Kurve auf dieser (und auch der andern) Grenzkurve nicht senkrecht steht *).

Schlussbemerkung.

XIV. Wie bereits zu IX. bemerkt, sind die dort und in XIII. geführten Rechnungen allgemeiner Art, und wir haben sie desshalb auch in allgemeinen Zeichen durchgeführt.

Wo also eine ähnliche Aufgabe auftritt, werden wir die an beiden Orten erhaltenen Gleichungen sofort benutzen können.

Aus XIII. ergibt sich sofort auch die Bedingung, unter der die gesuchte Kurve senkrecht steht auf der Grenzkurve. Es muss nämlich (an den Gränzen):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = y'\left(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'} - z'\frac{\partial \Phi}{\partial z'}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = z'\left(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'} - z'\frac{\partial \Phi}{\partial z'}\right)$$

sein; d. h.

$$y'\Phi = (1+y'^2)\frac{\partial \Phi}{\partial y'} + y'z'\frac{\partial \Phi}{\partial z'}, \quad z'\Phi = (1+z'^2)\frac{\partial \Phi}{\partial z'} + y'z'\frac{\partial \Phi}{\partial y'}.$$

Natürlich kann man diese Gleichungen auch schreiben:

$$z'\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = y'\frac{\partial \Phi}{\partial z'}, \quad y'\Phi = (1+y'^2)\frac{\partial \Phi}{\partial y'} + y'z'\frac{\partial \Phi}{\partial z'},$$

oder

$$z'\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = y'\frac{\partial \Phi}{\partial z'}, \quad y'\Phi = (1+y'^2+z'^2)\frac{\partial \Phi}{\partial y'};$$

oder

$$z'\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = y'\frac{\partial \Phi}{\partial z'}, \quad z'\Phi = (1+y'^2+z'^2)\frac{\partial \Phi}{\partial z'}.$$

---

*) Es wäre dazu nöthig, dass

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{(a+z)y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{\lambda \alpha y'}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{(a+z)y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \lambda \alpha^2,$$

mithin $\lambda = -\lambda \alpha^2$, was unmöglich ist.

Dass diese Bedingungen in VIII. erfüllt sind, ist sofort ersichtlich, da (weil $v = 0$ an den Gränzen)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{(z+a)y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{(z+a)z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}};$$

$$z'\Phi = (z+a)z'\sqrt{1+y'^2+z'^2}.$$

§. 20.

Kürzeste Linie auf einer krummen Oberfläche.

I. Auf der krummen Oberfläche, deren Gleichung (in rechtwinkeligen Koordinaten)

$$v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

ist, soll die kürzeste Linie bestimmt werden.

Hier ist (§. 13, II.)

$$\Phi = \sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda v = f + \lambda v,$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = 0,$$

woraus durch Elimination von λ:

$$\frac{\partial v}{\partial z}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Da, weil $v = 0$ an den Gränzen, für diese

$$y'\Phi = (1+y'^2+z'^2)\frac{\partial \Phi}{\partial y'}, \quad z'\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = y'\frac{\partial \Phi}{\partial z'},$$

so steht die gesuchte Kurve auf etwaigen Grenzkurven senkrecht. Hinsichtlich der Entscheidung, ob M. M., hat man (§. 17, IV.) die Grösse

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'\partial z'}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

d. h.

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + 2y'z'\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + (1+z'^2)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \quad . \quad . \quad (c)$$

in Bezug auf ihr Zeichen zu untersuchen. Da aber diese Grösse gleich

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(y'\frac{\partial v}{\partial z} + z'\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

also immer positiv ist, so kann nur von einem Minimum die Rede sein. Hierbei ist selbstverständlich, dass wenn die kürzeste (geodätische) Linie vom Punkte A zum Punkte B geht, und C in derselben zwischen A und B liegt, das Stück AC auch die kürzeste Linie zwischen A und C ist.

II. Aus der Eigenschaft, dass die kürzeste Linie auf der Grenzkurve senkrecht steht, lässt sich sofort ein interessanter Satz folgern.

Zieht man nämlich (natürlich auf der betrachteten Oberfläche) eine (beliebige) Menge geodätischer Linien von demselben Punkte A aus, nimmt auf allen dieselbe Länge L von A aus, und verbindet die Endpunkte, so erhält man eine Kurve, welche auf allen geodätischen Linien senkrecht steht.

Denn betrachtet man diese Kurve als gegeben, so müssen alle die gezogenen geodätischen Linien an ihr enden, und es kann jede, da sie alle gleich lang sind, als die kürzeste Entfernung des Punktes A von jener Kurve angesehen werden, steht folglich auf der Grenzkurve senkrecht.

III. Die Gleichung (b) drückt eine Haupteigenschaft der geodätischen Kurve aus, die nämlich, dass die Krümmungsebene dieser Kurve zugleich Normalebene der krummen Fläche sei.

Die Gleichung der Krümmungsebene ist nämlich

$$(z'y''-y'z'')(X-x)+z''(Y-y)-y''(Z-z)=0;$$

die der Tangentialebene an die krumme Fläche (in demselben Punkte):

$$\frac{\partial v}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial v}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial v}{\partial z}(Z-z)=0,$$

und die Bedingung, dass beide auf einander senkrecht stehen:

$$(z'y''-y'z'')\frac{\partial v}{\partial x}+z''\frac{\partial v}{\partial y}-y''\frac{\partial v}{\partial z}=0.$$

Aber es ist auch

$$\frac{\partial v}{\partial x}+y'\frac{\partial v}{\partial y}+z'\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

so dass obige Gleichung heisst

$$[(z'y''-y'z'')y'-z'']\frac{\partial v}{\partial y}+[(z'y''-y'z'')z'+y'']\frac{\partial v}{\partial z}=0.$$

Die (b) ist

$$\frac{\partial v}{\partial z}[y''(1+y'^2+z'^2)-y'(y'y''+z'z'')]$$
$$=\frac{\partial v}{\partial y}[z''(1+y'^2+z'^2)-z'(y'y''+z'z'')],$$

d. h.

$$\frac{\partial v}{\partial z}[y''(1+z'^2)-y'z'z'']=\frac{\partial v}{\partial y}[z''(1+y'^2)-y'z'y''],$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}[y''+z'(y''z'-y'z'')]=\frac{\partial v}{\partial y}[z''+y'(z''y'-y''z')],$$

was eben obige Bedingungsgleichung ist.

IV. Die Anzahl der durch Integration eintretenden willkürlichen Konstanten ist hier nur zwei. Im Falle von Grenzgleichungen wird man im Grunde auf die Formeln des ersten Abschnitts (Entscheidung betreffend) zurückgreifen müssen, also z als durch x und y mittelst (a) gegeben ansehen und dann die Untersuchung so führen, als ob nur eine Funktion (y) gesucht wäre. Die Grenzkurven entsprechen dann je einer Gleichung zwischen x und y an den Grenzen *).

Von dieser Anschauung aus hätte man in §. 3, III.

$$f=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

zu setzen, müsste aber dabei z' aus $v=0$ ersetzen. Heisst *letztere* Gleichung aufgelöst:

$$z=\varphi(x,y),$$

so wäre

$$z'=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y', \text{ also } f=\sqrt{1+y'^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right)^2}.$$

Folglich wäre in §. 3, III.

$$\frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}+\frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)=0,$$

wo

$$\frac{\partial f}{\partial z'}=\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}};$$

$$\frac{\partial z'}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right),\quad \frac{\partial z'}{\partial y'}=\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

und z' durch $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'$ zu ersetzen wäre. Diese Gleichung heisst auch

$$\frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial z'}{\partial y'}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}-\frac{\partial f}{\partial z'}\frac{d}{dx}\frac{\partial z'}{\partial y'}=0,$$

*) Sind $\psi=0$, $v=0$ die Gleichungen der einen Grenzkurve, so muss man in ψ die Grösse z durch x und y ersetzt denken und die so erhaltene Gleichung $\psi=0$ ist die eine Gleichung an der betreffenden Grenze.

oder

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} + \frac{\partial f}{\partial z'}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}y' - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}y'\right] = 0,$$

d. h. ist die (b), wenn man beachtet, dass $v = z - \varphi$.

Sind nun

$$y = \psi(x, c_1, c_2), \quad z = \psi_1(x, c_1, c_2)$$

die Integralgleichungen unseres Problems, so ist die erste dieser Gleichungen auch die Integralgleichung der obigen Gleichung, d. h. der Gleichung (b), wenn man darin z ersetzt hat.

Demgemäss wird man in §. 4, V. untersuchen, ob sich m so bestimmen lasse, dass

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_1} + m\frac{\partial \psi}{\partial c_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

innerhalb der Integrationsgrenzen nicht Null sei.

Bei der Entscheidung im Falle von Grenzbedingungen wird man den Vorschriften des §. 6 gemäss verfahren, wenn man im einzelnen Falle es nicht vorzieht, durch neue Wahl der Koordinaten die Bedingungsgleichung zu entfernen, wodurch die Aufgabe geradezu auf die des ersten Abschnittes zurückgeführt ist.

Kürzeste Kurve auf einer Kugel.

V. Ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Kugel, so ist die (b):

$$z\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - y\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

woraus

$$zy' - yz' = c_1\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Daneben ist

$$x + yy' + zz' = 0, \quad yy' + zz' = -x.$$

Man hat nun

$$\begin{array}{c} z^2y'^2 - 2yzy'z' + y^2z'^2 = c_1^2(1 + y'^2 + z'^2) \\ y^2y'^2 + 2yzy'z' + z^2z'^2 = x^2 \\ \hline (y^2 + z^2)y'^2 + (y^2 + z^2)z'^2 = x^2 + c_1^2(1 + y'^2 + z'^2)' \end{array}$$

$$(y^2 + z^2)(1 + y'^2 + z'^2) = x^2 + y^2 + z^2 + c_1^2(1 + y'^2 + z'^2),$$

$$(r^2 - x^2 - c_1^2)(1 + y'^2 + z'^2) = r^2, \quad 1 + y'^2 + z'^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2 - c_1^2},$$

$$zy' - yz' = \frac{c_1 r}{\sqrt{r^2 - x^2 - c_1^2}}, \quad \frac{zy' - y'z'}{y^2 + z^2} = \frac{c_1 r}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2 - c_1^2}},$$

$$arc\left(tg = \frac{y}{z}\right) = -\, arc\left(tg = \frac{r\sqrt{r^2 - c_1^2 - x^2}}{c_1 x}\right) + c_2,$$

so dass

$$\frac{y}{z} = \frac{tg\, c_2 - \dfrac{r\sqrt{r^2 - c_1^2 - x^2}}{c_1 x}}{1 + r\, tg\, c_2 \dfrac{\sqrt{r^2 - c_1^2 - x^2}}{c_1 x}},$$

$$\frac{r\sqrt{r^2 c_1^2 - x^2}}{c_1 x} = \frac{z\, tg\, c_2 - y}{y\, tg\, c_2 + z};$$

$$\frac{r^2(r^2 - c_1^2 - x^2)}{c_1^2 x^2} + 1 = \frac{(y^2 + z^2)(1 + tg^2 c_2)}{(y\, tg\, c_2 + z)^2},$$

$$\frac{(r^2 - c_1^2)(r^2 - x^2)}{c_1^2 x^2} = \frac{(r^2 - x^2)}{(y \sin c_2 + z \cos c_2)^2},$$

$$\pm \frac{c_1 x}{\sqrt{r^2 - c_1^2}} = y \sin c_2 + z \cos c_2.$$

Dies ist die Gleichung einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene, so dass die gesuchte Kurve ein grösster Kreis der Kugel ist.

VI. Wir wollen zur Uebung den besondern Fall betrachten, da auf der Kugel von einem bestimmten Punkte aus auf einen grössten Kreis eine kürzeste Linie soll gezogen werden.

Wir wählen die Polarcoordinaten des §. 9, XII., wo wir jedoch die yz-Ebene zur Ebene des Aequators wählen, die z-Axe in den Anfangsmeridian legen und die Länge von der z-Axe gegen die y-Axe zählen. Dann ist

$$x = r \sin\beta, \quad y = r\cos\beta \sin\lambda, \quad z = r\cos\beta\cos\lambda,$$

und mittelst dieser Grössen ist die Gleichung der Kugel identisch erfüllt. Daraus folgt, wenn man etwa β als Funktion von λ ansieht:

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 = r^2\left[\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)^2 + \cos^2\beta\right],$$

$$z\frac{dy}{d\lambda} - y\frac{dz}{d\lambda} = r^2\cos^2\beta,$$

so dass die Differentialgleichung der Kurve ist:

$$r\cos^2\beta = c_1\sqrt{\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)^2 + \cos^2\beta},\quad c_1^2\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)^2 = r^2\cos^4\beta - c_1^2\cos^2\beta,$$

$$c_1\frac{d\beta}{d\lambda} = \pm\cos\beta\sqrt{r^2\cos^2\beta - c_1^2}\quad .\ .\ .\ .\ \text{(d)}$$

wo nun ein Zeichenwechsel dann eintritt, wenn $r^2\cos^2\beta' = c_1^2$, $r\cos\beta = c_1$ (da $c_1 > 0$ ist*). Aus dieser Gleichung folgt

$$\pm c_1\int\frac{d\beta}{\cos\beta\sqrt{r^2\cos^2\beta - c_1^2}} = \lambda + c_2,$$

$$\pm\, arc\left(tg = \frac{c_1\sin\beta}{\sqrt{r^2\cos^2\beta - c_1^2}}\right) = \lambda + c_2.$$

Da nun der Zeichenwechsel vor sich geht, wenn $r^2\cos^2\beta = c_1^2$, und also die erste Seite dann springt, so folgt hieraus

$$\frac{c_1\sin\beta}{\sqrt{r^2\cos^2\beta - c_1^2}} = \pm\, tg(\lambda + c_2),$$

wo man, weil für $tg(\lambda + c_2) = \infty$ ein Zeichenwechsel eintritt, vom Doppelzeichen absehen darf.

Hieraus

$$1 + \frac{r^2\cos^2\beta - c_1^2}{c_1^2\sin^2\beta} = \frac{(r^2 - c_1^2)\cos^2\beta}{c_1^2\sin^2\beta}$$

$$= 1 + cotg^2(\lambda + c_2) = \frac{1}{\sin^2(\lambda + c_2)},$$

d. h.

$$tg^2\beta = \frac{r^2 - c_1^2}{c_1^2}\sin^2(\lambda + c_2),$$

und mithin

$$tg\beta = \frac{\sqrt{r^2 - c_1^2}}{c_1}\sin(\lambda + c_2),\quad .\ .\ .\ .\ \text{(d')}$$

wo wir nun ebenfalls kein Doppelzeichen setzen, indem wir die Bedingung, dass $c_1 > 0$ sein müsse, fallen lassen wollen. (Ein Zeichenwechsel tritt im Laufe der Kurve nur in Folge der natürlichen Zeichenwechsel der trigonometrischen Funktionen ein, nämlich für β' bei $\cos(\lambda + c_2) = 0$; aber es könnte möglicher Weise dem ganzen Ausdruck das — Zeichen vorzusetzen sein.) Aus (d') folgt auch, da β zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$:

*) Setzt man $c_1 > 0$ voraus, so muss λ beständig wachsen mit wachsendem Bogen.

$$\beta = arc\left[tg = \frac{\sqrt{r^2 - c_1^2}}{c_1} sin(\lambda + c_2)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (d'')$$

Sind die (Polar-) Koordinaten des festen Punktes β_1, λ_1, so ist

$$\frac{\sqrt{r^2 - c_1^2}}{c_1} = \frac{tg\,\beta_1}{sin(\lambda_1 + c_2)}, \text{ also die (d'): } tg\,\beta = tg\,\beta_1 \frac{sin(\lambda + c_2)}{sin(\lambda_1 + c_2)} \quad (d_1)$$

Wir wollen nun den grössten Kreis, auf den die kürzeste Linie gezogen werden soll, als den Anfangs-Meridian (Ebene der xz) nehmen. Dann ist seine Gleichung

$$\lambda = 0,$$

und es muss nun noch c_2 (bequemer: c) so bestimmt werden, dass

$$\int_0^{\lambda_1} \sqrt{cos^2\beta + \beta'^2}\, d\lambda \text{ ein Minimum.}$$

Daraus (§. 7, VIII.):

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\lambda_1} \frac{\beta'}{\sqrt{cos^2\beta + \beta'^2}} \frac{\partial \beta}{\partial c} = 0.$$

Aber aus (d_1) oder (d''), wenn z. B. $\frac{tg\,\beta_1}{sin(\lambda_1 + c)} = \mu$:

$$\frac{\partial \beta}{\partial c} = \frac{1}{1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)}\left[\mu\, cos(\lambda + c) - \frac{tg\,\beta_1\, cos(\lambda_1 + c)\, sin(\lambda + c)}{sin^2(\lambda_1 + c)}\right]$$

$$= \frac{\mu}{1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)} \frac{sin(\lambda_1 - \lambda)}{sin(\lambda_1 + c)}; \quad \beta' = \frac{\mu\, cos(\lambda + c)}{1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)},$$

$$cos^2\beta = \frac{1}{1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)}, \quad cos^2\beta + \beta'^2$$

$$= \frac{1}{1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)}\left[1 + \frac{\mu^2 cos^2(\lambda + c)}{1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)}\right]$$

$$= \frac{1 + \mu^2}{[1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)]^2}; \quad \sqrt{cos^2\beta + \beta'^2} = \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)};$$

$$\frac{\beta'}{\sqrt{cos^2\beta + \beta'^2}} \frac{\partial \beta}{\partial c} = \frac{\mu^2 cos(\lambda + c)}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{sin(\lambda_1 - \lambda)}{sin(\lambda_1 + c)} \frac{1}{1 + \mu^2 sin^2(\lambda + c)}.$$

Demnach muss

$$\frac{\mu^2 cos\, c\, sin\, \lambda_1}{\sqrt{1 + \mu^2}\, sin(\lambda_1 + c)\,[1 + \mu^2 sin^2 c]} = 0$$

sein, woraus nur

$$cos\, c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

folgt. Zugleich ist

$$\frac{d^2J}{dc^2} = \frac{d}{dc}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\lambda_1}\frac{\beta'}{\sqrt{\cos^2\beta+\beta'^2}}\frac{\partial\beta}{\partial c}$$

$$= -\frac{d}{dc}\frac{\mu^2\cos c\sin\lambda_1}{\sqrt{1+\mu^2\sin(\lambda_1+c)[1+\mu^2\sin^2 c]}},$$

in welcher Grösse nach geschehener Differenzirung $\cos c = 0$ zu setzen ist. Dadurch erhält sie dasselbe Zeichen wie

$$\frac{\mu^2\sin c\sin\lambda_1}{\sqrt{1+\mu^2\sin(\lambda_1+c)[1+\mu^2\sin^2 c]}},$$

d. h. wie $$\frac{\sin c\sin\lambda_1}{\sin(\lambda_1+c)} = \frac{\sin c\sin\lambda_1}{\cos\lambda_1\sin c} = tg\,\lambda_1.$$

Für ein wirkliches Minimum muss also $tg\,\lambda_1 > 0$ sein.

Die Gleichung der Kurve ist nun

$$tg\,\beta = tg\,\beta_1\frac{\sin(\lambda+c)}{\sin(\lambda_1+c)} = tg\,\beta_1\frac{\cos\lambda}{\cos\lambda_1}\ ^{*)}$$

und die Breite des Endpunktes (bei $\lambda = 0$) ist durch

$$tg\,\beta_0 = \frac{tg\,\beta_1}{\cos\lambda_1}$$

gegeben. Dass $tg\,\lambda_1 > 0$, also hier $\lambda_1 < \frac{1}{2}\pi$ sein soll, wird leicht dadurch begreiflich, dass $\lambda = 0$ die Ebene des Anfangs-Meridians und dessen, der 180° entspricht, darstellt.

Kürzeste Linie auf einem Kreiszylinder.

VII. Der Zylinder stehe senkrecht auf der xz-Ebene und sei

$$x^2 + z^2 = r^2$$

seine Gleichung. Führen wir hier für x und z die Werthe

$$x = r\cos\omega,\quad z = r\sin\omega$$

ein, so ist die Gleichung des Zylinders überflüssig. Dann ist ω als unabhängig anzusehen und da hier $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, also

$$y' = c\sqrt{1+y'^2+z'^2}:$$

$$\frac{dy}{d\omega} = c\sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2} = c\sqrt{r^2+\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2},$$

*) Ist $\beta_1 = 0$, d. h. der gewählte Punkt im Aequator, so folgt daraus auch $\beta = 0$, d. h. der Aequator ist selbst die geodätische Linie.

so ist

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 = \frac{c^2 r^2}{1 - c^2}, \quad y = c' \pm \frac{cr}{\sqrt{1 - c^2}}\omega.$$

Es sind also die Gleichungen der Kurve:

$$y = c' \pm \frac{cr}{\sqrt{1 - c^2}}\omega, \quad x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega.$$

Das zeigt eine Schraubenlinie an.

§. 21.

Geodätische Linie auf der Erdfläche.

I. Wir sehen die Erdfläche als entstanden durch Rotation einer Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, um ihre kleine Axe $(2b)$ an. Dann ist die Gleichung derselben bei der bekannten Wahl der Axe:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Die Ebene der yz ist die des Aequators, dessen Halbmesser a ist; b ist die halbe Erdaxe, deren Richtung die Axe der x ist. Die Punkte, in denen die Erdaxe die Erde trifft, sind die Pole, und zwar der Nordpol = Ende der positiven x-Axe, Südpol = Ende der negativen x-Axe. Eine Ebene durch die Erdaxe schneidet die Erde in einem Meridian.

Wir führen nun andere Koordinaten statt obiger ein, nämlich

den Winkel β, welchen die Normale im Punkte (x, y, z) mit der Ebene des Aequators macht, welchen wir von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ rechnen (positiv auf der nördlichen, negativ auf der südlichen Erdhälfte);

den Winkel λ, den die durch (x, y, z) gehende halbe Meridianebene (halbe erzeugende Ellipse) mit der positiven Ebene der xz macht; so dass λ auch der Winkel ist, den der Schnitt des fraglichen Meridians und des Aequators mit der positiven z-Axe macht, wobei wir ihn im Drehungssinne: Axe der z gegen die der y rechnen.

β heissen wir die geographische Breite, λ die geographische Länge des Punktes, und rechnen letztere von 0 bis 2π.

Dann ist aus der Geometrie bekannt, dass

$$\sin\beta = \frac{a^2 x}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 (y^2 + z^2)}}; \quad z = \sqrt{y^2 + z^2}\cos\lambda, \quad y = \sqrt{y^2 + z^2}\sin\lambda,$$

woraus

$$x = \frac{b^2 \sin\beta}{a\sqrt{1 - e^2 \sin^2\beta}}, \quad y = \frac{a\cos\beta \sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}}, \quad z = \frac{a\cos\beta\cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}},$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Setzt man noch

$$a\,tg\,\omega = b\,tg\,\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

so erhält man, wenn ω ebenfalls zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gerechnet wird:

$$x = b\sin\omega, \quad y = a\cos\omega\sin\lambda, \quad z = a\cos\omega\cos\lambda \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

Mittelst dieser Gleichungen wird die Bedingungsgleichung (a) überflüssig und man kann die Aufgabe als zum ersten Abschnitt gehörig ansehen.

Sieht man λ als Funktion von ω an, so ist

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 = b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2,$$

so dass

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2}\, d\omega$$

ein Minimum werden soll. Daraus folgt (§. 3, VI.)

$$a^2\cos^2\omega\frac{d\lambda}{d\omega} = c\sqrt{b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2},$$

oder wenn $b^2 = a^2(1 - e^2)$ gesetzt wird:

$$a\cos^2\omega\frac{d\lambda}{d\omega} = c\sqrt{1 - e^2\cos^2\omega + \cos^2\omega\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2} \quad . \quad . \quad \text{(d)}$$

als Gleichung der geodätischen Linie. Es ist ganz selbstverständlich, dass man dieselbe Gleichung aus (b) in §. 20, I. gezogen hätte.

Daraus folgt auch

$$\cos^2\omega(a^2\cos^2\omega - c^2)\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2 = c^2(1 - e^2\cos^2\omega)\,^{*)} \quad . \quad . \quad (\delta)$$

---

*) Wollte man ω als Funktion von λ ansehen, so hätte man natürlich eben so:

$$\cos^2\omega(a^2\cos^2\omega - c^2) = c^2(1 - e^2\cos^2\omega)\left(\frac{d\omega}{d\lambda}\right)^2.$$

Da nie $1 - e^2 \cos^2 \omega + \cos^2 \omega \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2 = 0$ werden kann, so ist natürlich von einem Zeichenwechsel in der Formel (d) keine Rede, und es folgt daraus, dass $\frac{d\lambda}{d\omega}$ immer dasselbe Zeichen hat, wie die Konstante c. Demnach ist auch

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = \frac{c\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}}{\cos \omega \sqrt{a^2 \cos^2 \omega - c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta')$$

Dies Alles setzt aber voraus, dass ω beständig wachse (wie das anfängliche Integral fordert); im anderen Falle würde das — Zeichen auf der zweiten Seite von (d) stehen und damit auch von (δ'). Sonst würden dieselben Formeln gelten. Man kann also die Formel (δ') auch auf diesen allgemeineren Fall erstrecken, muss aber dann auf der zweiten Seite einen (möglichen) Zeichenwechsel zulassen. Dieser kann nun nur erfolgen, wenn

$$a^2 \cos^2 \omega = c^2$$

ist. Wir werden also allgemeiner

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = \pm \frac{c\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}}{\cos \omega \sqrt{a^2 \cos^2 \omega - c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d')$$

setzen, wo der Wechsel im Zeichen eintritt, wenn $a^2 \cos^2 \omega = c^2$ ist.

Führen wir den Hülfswinkel φ ein, so dass

$$a \sin \omega = \cos \varphi \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \varphi \text{ von } 0 \text{ bis } \pi, \quad . \quad . \quad (e)$$

so ist

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \pm \frac{c\sqrt{a^2(1-e^2) + (a^2-c^2)e^2 \cos^2 \varphi}}{\sqrt{c^2 + (a^2-c^2)\sin^2 \varphi}\,\sqrt{a^2 - c^2}\,\sqrt{\sin^2 \varphi}} \frac{d\omega}{d\varphi}$$

$$= \mp \frac{c\sqrt{a^2 - e^2 c^2 - (a^2-c^2)e^2 \sin^2 \varphi}}{c^2 + (a^2-c^2)\sin^2 \varphi} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi}}.$$

Da φ nur zwischen 0 und π liegt, so ist der zuletzt stehende Bruch immer 1 und man hat

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \mp \frac{c\sqrt{a^2 - e^2 c^2}\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{c^2 + (a^2-c^2)\sin^2 \varphi}, \quad k^2 = \frac{(a^2-c^2)e^2}{a^2 - e^2 c^2} \,. \quad (f)$$

Der Zeichenwechsel tritt ein, wenn

$$a^2 \cos^2 \omega = c^2, \quad \text{d. h. } \sin^2 \varphi = 0,$$

oder nur für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Dies kann übrigens eintreten, indem etwa φ bis 0 herabgegangen ist und von da an wieder wächst. Da

$$a \cos\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = - \sin\varphi \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \text{also} \ \frac{d\omega}{d\varphi} < 0,$$

so folgt aus (d'), dass nothwendig in den Formeln (d') und (f) die Zeichen sich entsprechen, wie dies aus der Ableitung ohnehin klar ist.

Welches der zwei Zeichen in (f) oder (d') anfänglich gilt, kann natürlich nur im besonderen Falle entschieden werden. Dies gilt dann aber so lange, bis $\sin\varphi$ zu Null wird, worauf, wenn die geodätische Linie weiter verläuft, das entgegen gesetzte zu wählen ist.

Dieser eigenthümliche Fall, der einen Zeichenwechsel in $\frac{d\omega}{d\lambda}$ begründet, tritt also dann ein, wenn bei stetig wachsendem λ die Grösse ω einen grössten (oder kleinsten) Werth erreicht und dann zurückgeht. Dass dadurch ein Zeichenwechsel bedingt ist, ist bekannt. ω heisst übrigens gewöhnlich die reduzirte Breite.

Wir werden im Folgenden nur den Fall betrachten, da die geodätische Linie zwischen zwei festen Punkten gezogen ist.

Ist s der Bogen, so ist

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2 = b^2 \cos^2\omega + a^2 \sin^2\omega + a^2 \cos^2\omega \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2,$$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = (b^2 \cos^2\omega + a^2 \sin^2\omega)\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 + a^2 \cos^2\omega \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2$$

$$= a^2(1 - e^2 \cos^2\omega)\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 + \frac{a^2 c^2 (1 - e^2 \cos^2\omega)}{a^2 \cos^2\omega - c^2}\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2$$

$$= \frac{a^4(1 - e^2 \cos^2\omega)\cos^2\omega}{a^2 \cos^2\omega - c^2}\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 = \frac{a^4}{c^2}\cos^4\omega \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2 \left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2$$

$$= \frac{a^4 \cos^4\omega}{c^2}\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{[c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2\varphi]^2 (a^2 - e^2 c^2)(1 - k^2 \sin^2\varphi)}{[c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2\varphi]^2},$$

d. h.

$$\frac{ds}{d\varphi} = \pm \sqrt{a^2 - e^2 c^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad \text{(g)}$$

wo nun entweder das eine oder andere Zeichen zu wählen ist.

Uebrigens ist

$$\frac{ds}{d\omega} = \mp \frac{a \cos\omega}{\sin\varphi \sqrt{a^2 - c^2}} \sqrt{a^2 - e^2 c^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$

wo nun die Grösse zweiter Seite (abgesehen vom Zeichen) positiv ist. Also gilt in (g) das untere Zeichen, wenn s und ω zugleich wachsen, das obere im anderen Falle.

Die Doppelzeichen in den Formeln (f) und (g) hängen insofern zusammen, als die Aenderung in beiden zugleich geschieht, wenn man s immer als wachsend ansieht und eben so λ, was man beides wohl darf.

Azimuth.

II. Durch irgend einen Punkt der geodätischen Linie wollen wir einen Meridian ziehen, der sie schneidet. Der Winkel beider im Durchschnittspunkte sei α. Beziehen x, y, z sich auf die geodätische Linie; x', y', z' auf den Meridian (dessen Gleichung $\lambda = C$ ist), so ist

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{d\omega}\frac{dx'}{d\omega} + \frac{dy}{d\omega}\frac{dy'}{d\omega} + \frac{dz}{d\omega}\frac{dz'}{d\omega}}{\left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{dx'}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Aber

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 = b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2,$$

$$\left(\frac{dx'}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{d\omega}\right)^2 = b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega;$$

dann

$$\sin^2\alpha = \frac{\left(\frac{dx}{d\omega}\frac{dy'}{d\omega} - \frac{dy}{d\omega}\frac{dx'}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\omega}\frac{dz'}{d\omega} - \frac{dz}{d\omega}\frac{dx'}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\frac{dz'}{d\omega} - \frac{dy'}{d\omega}\frac{dz}{d\omega}\right)^2}{\left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2\right]\left[\left(\frac{dx'}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{d\omega}\right)^2\right]},$$

$$\frac{dx}{d\omega} = b\cos\omega,\quad \frac{dx'}{d\omega} = b\cos\omega,\quad \frac{dy}{d\omega} = a\cos\omega\cos\lambda\frac{d\lambda}{d\omega} - a\sin\omega\sin\lambda,$$

$$\frac{dy'}{d\omega} = -a\sin\omega\sin\lambda,\quad \frac{dz}{d\omega} = -a\sin\omega\cos\lambda - a\cos\omega\sin\lambda\frac{d\lambda}{d\omega},$$

$$\frac{dz'}{d\omega} = -a\sin\omega\cos\lambda.$$

Hieraus nun

$$\sin^2\alpha\left[b^2\cos^2\omega + a\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2\right][b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega]$$
$$= a^2\cos^2\omega\,(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2,$$

oder wegen (d):

$$\sin^2\alpha\frac{a^4\cos^4\omega}{c^2}\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2 = a^2\cos^2\omega\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2,\quad a^2\cos^2\omega\sin^2\alpha = c^2. \quad \text{(h)}$$

Diese Gleichung bestimmt α, das **Azimuth** der geodätischen Linie in dem betreffenden Punkte.

Da der Zeichenwechsel in den Formeln (d') und (g) eintritt, wenn $a^2 \cos^2 \omega = c^2$, so kann man auch aussagen, er trete ein für $\sin^2 \alpha = 1$.

Ist der Anfangswerth von α bekannt (ω mit seinem Anfangswerthe eben so), so gibt die (h) den Werth der Konstanten c^2.

Wir wollen das Azimuth α von der nach dem Nordpol gewendeten Seite des Meridians aus gegen die Richtung des wachsenden Bogens rechnen und zwar von 0 bis π, so dass $\sin \alpha > 0$.

Da $\frac{d\lambda}{d\omega}$ nicht Null werden kann (so lange nicht c überhaupt Null ist) und $\frac{d\lambda}{d\omega} = \infty$ nur für $\frac{d\omega}{d\lambda} = 0$ eintritt, so hat λ kein Maximum oder Minimum und nur ω hat ein solches (möglicherweise). Also kann man λ im ganzen Verlaufe der geodätischen Linie als beständig wachsend oder abnehmend ansehen.

Da ferner β und ω zugleich wachsen und zugleich abnehmen, so wird man leicht folgende Sätze als richtig erkennen.

1. Geht der wachsende Bogen im Sinne wachsender λ, so ist α so lange ein spitzer Winkel als β wächst, und wird stumpf, wenn β abnimmt.

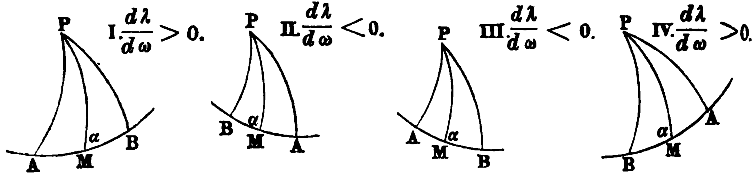
2. Geht der wachsende Bogen im Sinne abnehmender λ, so ist α ein spitzer Winkel, wenn β wächst, ein stumpfer, wenn β abnimmt.

Daraus folgt, dass in allen Fällen α spitz ist, wenn β (also ω) wächst; stumpf, wenn β (ω) abnimmt.

Nun ist $\frac{d\lambda}{d\omega} > 0$, wenn λ und ω zugleich wachsen, oder zugleich abnehmen; negativ im anderen Falle. Demnach, wenn α spitz ist, wird $\frac{d\lambda}{d\omega} > 0$ sein, wenn der Bogen mit λ wächst; dagegen negativ, wenn der wachsende Bogen nach der Richtung abnehmender λ geht; wenn α stumpf ist, wird $\frac{d\lambda}{d\omega} > 0$ sein, wenn der Bogen nach der Richtung abnehmender λ gewendet ist; positiv, wenn er nach der Richtung wachsender λ geht.

Heissen wir die Richtung wachsender λ die von „West gegen Ost" und bezeichnen sie durch die Richtung links nach rechts in unserer Zeichnung; ist A Anfangs-, B Endpunkt des Bogens; P der

Nordpol; M ein beliebiger Punkt der geodätischen Linie, so geben die folgenden Figuren die genannten Fälle an:



Natürlich ist nicht gemeint, dass in der ganzen Ausdehnung der geodätischen Linie α immer spitz oder immer stumpf sein müsse.

In den vier Fällen ist (für den Punkt M):

$$\frac{ds}{d\omega} > 0, \quad \frac{ds}{d\omega} > 0, \quad \frac{ds}{d\omega} < 0, \quad \frac{ds}{d\omega} < 0,$$

d. h. es ist $\frac{ds}{d\omega}$ positiv, so lange α spitz ist, und wird negativ, wenn α stumpf wird.

III. Setzen wir für c die Grösse $a\varrho$, wo ϱ nur positiv ist, und nehmen an:

1) Es sei das Azimuth im Anfangspunkte des Bogens spitz, so ist anfänglich

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = -\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi},$$

wenn der Bogen von West gegen Ost geht;

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = +\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi},$$

wenn der Bogen von Ost gegen West geht;

$$\frac{ds}{d\varphi} = -a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

in beiden Fällen.

2) Es sei das Azimuth im Anfangspunkte des Bogens stumpf, so ist anfänglich

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = +\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi},$$

wenn der Bogen von West gegen Ost geht;

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = -\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi},$$

wenn der Bogen von Ost gegen West geht;

$$\frac{ds}{d\varphi} = + a \sqrt{1 - e^2 \varrho^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

in beiden Fällen.

Das Zeichen bleibt so lange dasselbe bis α zu 90^0 wird, d. h. bis $\sin \varphi = 0$ wird, von wo an dann das entgegen gesetzte zu wählen ist; $k^2 = \frac{(1 - \varrho^2) e^2}{1 - e^2 \varrho^2}$.

3) Ist nun aber das Anfangsazimuth selbst 90^0, so kann man einen oder den anderen obiger Fälle wählen. Die Entscheidung lässt sich durch folgende Betrachtung fällen. Aus (h) folgt, dass dann im Anfang $c^2 = a^2 \cos^2 \omega$ ist, d. h. $\sin \varphi = 0$. Dies ist der Fall für $\varphi = 0$, oder $\varphi = \pi$. Der Fall $\varphi = 0$ setzt in (e) nothwendig $\omega > 0$, der Fall $\varphi = \pi$ aber $\omega < 0$ voraus, so dass ersterer nur auf der nördlichen, letzterer nur auf der südlichen Erdhälfte eintreten kann.

φ aber wird 0, wenn dieser Winkel vor diesem Werthe abnahm und nachher wächst; derselbe wird π im umgekehrten Falle. Denkt man sich die geodätische Linie als nach rückwärts verlängert, so ist im ersten Falle kurz vor dem Anfangspunkte $\frac{ds}{d\varphi}$ negativ, nachher positiv; während im anderen Falle die Dinge sich umgekehrt verhalten.

Daraus folgt, dass auf der nördlichen Erdhälfte dieser Fall zum obigen zweiten, auf der südlichen aber zum ersten zu rechnen ist.

Berechnung des Bogens.

IV. Sei φ_1 der Anfangswerth von φ, φ_2 der Endwerth, gezogen aus den Gleichungen

$$\sin \omega_1 = \cos \varphi_1 \sqrt{1 - \varrho^2}, \quad \sin \omega_2 = \cos \varphi_2 \sqrt{1 - \varrho^2},$$

so wird, insofern nicht der Werth

$$\cos \omega = \varrho \ (\sin \varphi = 0, \text{ wenn } \varrho = \cos \omega_1 \sin \alpha_1)$$

innerhalb der Ausdehnung des geodätischen Bogens möglich ist, der Bogen S sein, wenn α_1 das Anfangsazimuth:

$$\left.\begin{aligned} S &= - a \sqrt{1 - e^2 \varrho^2} \, [E(\varphi_2, k) - E(\varphi_1, k)], \text{ wenn } \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \\ S &= a \sqrt{1 - e^2 \varrho^2} \, [E(\varphi_2, k) - E(\varphi_1, k)], \text{ wenn } \alpha_1 > \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \text{(i)}$$

Für $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$ gilt die zweite Formel auf der nördlichen, die erste auf der südlichen Erdhälfte.

Ist aber der Werth $sin\ \varphi = 0$ möglich innerhalb der Grenzen des Bogens, so ist

$$S = -a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\int_{\varphi_1}^{0}\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}\,d\varphi + a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\int_{0}^{\varphi_2}\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\text{wenn } \alpha_1 < \frac{\pi}{2},$$

$$S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\int_{\varphi_1}^{\pi}\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}\,d\varphi - a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\int_{\pi}^{\varphi_2}\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\text{wenn } \alpha_1 > \frac{\pi}{2}.$$

Demnach (in diesem Falle)

$$\left.\begin{array}{l} S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\varphi_1,k) + E(\varphi_2,k)], \text{ wenn } \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \\ S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[2E(\pi,k) - E(\varphi_1,k) - E(\varphi_2,k)], \text{ wenn } \alpha_1 > \frac{1}{2}\pi. \end{array}\right\} (i')$$

Für $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$ sind diese Formeln nicht zulässig*) (oder aber sie müssten jetzt in ihrer Beziehung zur nördlichen oder südlichen Erdhälfte vertauscht werden).

In den Anwendungen liegt die Aufgabe immer so, dass man S kennt, nebst α_1, φ_1 (ω_1), und daraus φ_2, α_2 berechnen will. Da somit $E(\varphi_1, k)$ als bekannt darf angesehen werden, so wird sich in allen Fällen leicht entscheiden lassen, ob der Fall (i) oder (i') eintritt, da für $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$

bei (i) $S < a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,E(\varphi_1,k)$; bei (i') $S > a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,E(\varphi_1,k)$;

für $\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$

bei (i) $S < a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\pi,k) - E(\varphi_1,k)]$;

bei (i') $S > a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\pi,k) - E(\varphi_1,k)]$.

Berechnung der Längendifferenz.

V. Ist nicht innerhalb der geodätischen Linie $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (was in IV. entschieden), so ist, wenn $\lambda_2 - \lambda_1$ die Längendifferenz:

---

*) Die Darstellung setzt voraus, dass im Laufe der geodätischen Linie $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ vorkomme, wie dies für $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$ in (i) aufgefasst ist. Desshalb muss der Fall $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$ nur nach (i) behandelt werden, wo dann $\varphi_1 = 0$ auf der nördlichen, $\varphi_1 = \pi$ auf der südlichen Erdhälfte ist.

$$\lambda_2-\lambda_1=\mp\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi,\ \text{wenn}\ \alpha_1<\frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_2-\lambda_1=\pm\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varrho}\,d\varphi,\ \text{wenn}\ \alpha_1>\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ist aber $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ möglich innerhalb der geodätischen Linie:

$$\lambda_2-\lambda_1=\mp\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}\Bigg[\int\limits_{\varphi_1}^{0}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varrho}\,d\varphi$$
$$-\int\limits_{0}^{\varphi_2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi\Bigg],\ \text{wenn}\ \alpha_1<\frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_2-\lambda_1=\pm\varrho\sqrt{1-\varrho^2e^2}\Bigg[\int\limits_{\varphi_1}^{\pi}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi$$
$$-\int\limits_{\pi}^{\varphi_2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi\Bigg],\ \text{wenn}\ \alpha_1>\tfrac{1}{2}\pi.$$

Der Fall $\alpha_1=\frac{1}{2}\pi$ ist zu dem ersten der zweierlei Fälle zu rechnen. Hinsichtlich der Doppelzeichen ist die Entscheidung ebenfalls gefällt, indem jeweils das obere gilt, wenn $\lambda_2-\lambda_1$ positiv ist.

Es ist nun aber

$$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}=\frac{1-k^2\sin^2\varphi}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}\,\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\left[-\frac{k^2}{1-\varrho^2}+\left(1+\frac{k^2\varrho^2}{1-\varrho^2}\right)\frac{1}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}\right]\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\left[-\frac{e^2}{1-\varrho^2e^2}+\frac{1}{1-\varrho^2e^2}\,\frac{1}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}\right]\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Demnach

$$\varrho\sqrt{1-\varrho^2e^2}\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\varrho^2+(1-\varrho^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi=-\frac{e^2\varrho}{\sqrt{1-e^2\varrho^2}}[F(\mu_2,k)-F(\mu_1,k)]$$
$$+\frac{1}{\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}}\left[\Pi\left(\mu_2,\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2},k\right)-\Pi\left(\mu_1,\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2},k\right)\right],$$

woraus sich nun leicht die Werthe von $\lambda_2-\lambda_1$ ergeben.

Endgiltige Zusammenstellung für die Anwendung.

VI. Sei S bekannt, eben so φ_1, α_1; gesucht: φ_2, die Längendifferenz, die wir kurzweg λ heissen wollen, und α_2 das Azimuth im Endpunkte.

1. Wenn $\alpha_1 < \frac{1}{2}\pi$, $S < a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\, E(\varphi_1, k)$:

$$S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\varphi_1,k) - E(\varphi_2,k)]$$

$$\pm\lambda = -\frac{e^2\varrho}{\sqrt{1-e^2\varrho^2}}[F(\varphi_2,k) - F(\varphi_1,k)]$$

$$+\frac{1}{\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}}\left[\Pi\left(\varphi_2, \frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}, k\right) - \Pi\left(\varphi_1, \frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}, k\right)\right];$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\varrho}{\cos\omega_2},\ \alpha_2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

2. Wenn $\alpha_1 < \frac{1}{2}\pi$, $S > a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\, E(\varphi_1, k)$:

$$S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\varphi_1,k) + E(\varphi_2,k)],$$

$$\pm\lambda = \frac{\varrho e^2}{\sqrt{1-e^2\varrho^2}}[F(\varphi_1,k) + F(\varphi_2,k)]$$

$$-\frac{1}{\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}}\left[\Pi\left(\varphi_1, \frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}, k\right) + \Pi\left(\varphi_2, \frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}, k\right)\right];$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\varrho}{\cos\omega_2},\ \alpha_2 > \tfrac{1}{2}\pi.$$

3. Wenn $\alpha_1 > \frac{1}{2}\pi$, $S < a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\pi,k) - E(\varphi_1,k)]$:

$$S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\varphi_2,k) - E(\varphi_1,k)],$$

$$\pm\lambda = \frac{e^2\varrho}{\sqrt{1-e^2\varrho^2}}[F(\varphi_2,k) - F(\varphi_1,k)]$$

$$-\frac{1}{\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}}\left[\Pi\left(\varphi_2, \frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}, k\right) - \Pi\left(\varphi_1, \frac{1-\varrho^2}{\varrho^2}, k\right)\right];$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\varrho}{\cos\omega_2},\ \alpha_2 > \tfrac{1}{2}\pi.$$

4. Wenn $\alpha_1 > \frac{1}{2}\pi$, $S > a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\pi,k) - E(\varphi_1,k)]$:

$$S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[2E(\pi,k) - E(\varphi_1,k) - E(\varphi_2,k)],$$

$$\pm\lambda = -\frac{e^2\varrho}{\sqrt{1-e^2\varrho^2}}[2F(\pi,k) - F(\varphi_1,k) - F(\varphi_2,k)],$$

$$+\frac{1}{\varrho\sqrt{1-e_2\varrho^2}}\Big[2\Pi\Big(\pi,\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2},k\Big) - \Pi\Big(\varphi_1,\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2},k\Big)$$

$$-\Pi\Big(\varphi_2,\frac{1-\varphi_2}{\varrho^2},k\Big)\Big];$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\varrho}{\cos\omega_2},\ \alpha_2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

5. Wenn $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$ für die nördliche Hälfte der Erde:

$$S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,E(\varphi_2,k),$$

$$\pm\lambda = -\frac{\varrho e^2}{\sqrt{1-e^2\varrho^2}}F(\varphi_2,k) + \frac{1}{\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}}\Pi\Big(\varphi_2,\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2},k\Big);$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\varrho}{\cos\omega_2},\ \alpha_2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

6. Wenn $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$ für die südliche Erdhälfte:

$$S = a\sqrt{1-e^2\varrho^2}\,[E(\pi,k) - E(\varphi_2,k)];$$

$$\pm\lambda = -\frac{\varrho e^2}{\sqrt{1-e^2\varrho^2}}[F(\pi,k) - F(\varphi_2,k)]$$

$$+\frac{1}{\varrho\sqrt{1-e^2\varrho^2}}\Big[\Pi\Big(\pi,\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2},k\Big) - \Pi\Big(\varphi_2,\frac{1-\varrho^2}{\varrho^2},k\Big)\Big];$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\varrho}{\cos\omega_2},\ \alpha_2 > \tfrac{1}{2}\pi.$$

Hierbei ist das Doppelzeichen an λ immer derart zu wählen, dass $\lambda > 0$ ausfällt. Ferner ist

$$\varrho = \cos\omega_1\sin\alpha_1;\ k^2 = \frac{(1-\varrho^2)e^2}{1-e^2\varrho^2};$$

$$\cos\varphi\sqrt{1-\varrho^2} = \sin\omega;\ a\,tg\,\omega = b\,tg\,\beta.$$

Bemerkungen in Bezug auf Bessels Auflösung.

VII. Bessel hat die hier gelöste Aufgabe ebenfalls gelöst. Seine Auflösung ist insofern unvollständig, als sie je nur einen Fall (nämlich den ersten, und den dritten unserer obigen Fälle) beachtet. Es rührt dies daher, dass sein sphärisches Dreieck unter gewissen Bedingungen zwei Auflösungen zulässt. In unserer Betrachtung sind

diese Fälle alle genau festgestellt, und zwar so wie sie für die Anwendungen nöthig sind.

Bessel findet

$$S = a \int_0^{\mu_1} \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 (M + \mu)}\, \partial \mu,$$

wo $\sin m = \cos \omega_1 \sin \alpha_1$ (unser ϱ), $\sin M = \frac{\sin \omega_1}{\cos m} = \frac{\sin \omega_1}{\sqrt{1-\varrho^2}}$.

Da auch

$$S = a \int_M^{M+\mu_1} \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 \psi}\, d\psi$$

so kann man offenbar $M = \frac{1}{2}\pi - \varphi_1$ setzen, wodurch sich Bessels Formel auf unsere reduzirt.

Eine Darstellung der Besselschen Formeln gibt Grunert in: „Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie." Die dortigen Formeln (474) auf S. 265 sind

$$\sin \alpha \cos \omega = \sin \alpha_1 \cos \omega_1, \quad \frac{ds}{d\omega} = \pm \frac{a \cos \omega \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}}{\sqrt{\cos^2 \omega - \varrho^2}}$$

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = \pm \frac{\varrho \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}}{\cos \omega \sqrt{\cos^2 \omega - \varrho^2}},$$

von denen gesagt ist, dass das obere Zeichen gilt, wenn $\alpha_1 < \frac{1}{2}\pi$, das untere, wenn $\alpha_1 > \frac{1}{2}\pi$. Die zweite dieser Formeln ist unsere Formel (g), wobei aber der Fall $\cos \omega = \varrho$ noch weiter untersucht werden musste. Die dritte ist die Formel (d'), bei der dasselbe anzumerken ist. Der Fall, da $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$, ist in obigen Formeln gar nicht erledigt.

Besonderer Fall, da $\omega_2 = \omega_1$ ($\varphi_2 = \varphi_1$).

VIII. Dieser Fall kann in der gewöhnlichen Darstellung gar nicht erledigt werden. Für uns gehört er in VI. zum zweiten oder vierten. Der Fall $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$ ($\varphi_1 = 0$) ist diesmal nicht zulässig für die nördliche Erdhälfte. Jetzt liegt natürlich ein Maximum von ω ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$) innerhalb der geodätischen Linie.

§. 22.

1. Leitende Kurve des grössten Zylinders.

I. Es sind zwei parallele Ebenen von der Entfernung h gegeben und in einer derselben ein fester Punkt. Durch letzteren soll eine Kurve gelegt werden, welche an der anderen Ebene endet und bis dorthin die Länge L hat, so beschaffen, dass, wenn sie als leitende Kurve einer Zylinderfläche angesehen wird, deren erzeugende Gerade senkrecht auf beiden Ebenen stehen, das Stück der Zylinderfläche zwischen beiden Ebenen ein Maximum sei.

Wir nehmen den gegebenen Punkt zum Koordinatenanfang, die eine der Ebenen, in der er liegt, zur Ebene der xy. Dann ist der Flächeninhalt zwischen beiden Ebenen gleich

$$h\int_0^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

während

$$L=\int_c^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

ist. Dabei wird $x_2 > 0$ vorausgesetzt und der Kurvenbogen wachsend mit wachsendem x. Also ist (§. 10, IV.)

$$f=\sqrt{1+y'^2}+a\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

und (§. 13, I.)

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=c_1,\ \frac{\partial f}{\partial z'}=c_2;\ \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c_1,$$

$$\frac{az'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c_2.$$

Die letzte Gleichung liefert

$$z'=\pm\frac{c_2\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{a^2-c_2^2}},\ \sqrt{1+y'^2+z'^2}=\frac{az'}{c_2}=\pm\frac{a\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{a^2-c_2^2}};$$

und dann

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \sqrt{a^2-c_2^2} = c_1, \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{c_1}{1 \pm \sqrt{a^2-c_2^2}} = \mu,$$

woraus

$$y' = \pm \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{y'}{\mu} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Um hinsichtlich der Doppelzeichen eine Entscheidung zu haben, suchen wir die wegen des M. M. Dazu ist (§. 17, II.)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{a(1+z'^2)}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} = \frac{a(1+y'^2)}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'} = -\frac{a y' z'}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}.$$

Also muss nothwendig $a < 0$ sein, damit $\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} < 0$; dann aber muss auch

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} = -\frac{a^2}{(1+y'^2+z'^2)^2} - \frac{a}{(1+y'^2)^{1/2}(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$

negativ sein. Dazu gehört, dass

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2} + a\sqrt{1+y'^2} < 0 \qquad (\alpha)$$

sei innerhalb der ganzen Ausdehnung der Integration.

Aus der Gleichung

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2} = \pm \frac{a\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{a^2-c_2^2}}$$

folgt nun (weil $a < 0$), dass das untere Zeichen gelten müsse, so dass

$$\mu = \frac{c_1}{1-\sqrt{a^2-c_2^2}}, \quad z' = -\frac{c_2\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{a^2-c_2^2}}.$$

Weiter ist

$$y'(\sqrt{1+y'^2+z'^2} + a\sqrt{1+y'^2}) = c_1\sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

also haben wegen (α) y' und c_1 verschiedenes Zeichen, was der Fall ist, wenn

$$1 - \sqrt{a^2-c_2^2} < 0. \qquad (\alpha')$$

Nun ist, weil die Kurve durch den Koordinatenanfang geht:

$$y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} x, \quad z = \mp \frac{c_2}{\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{a^2-c_2^2}} x, \quad . \; . \; . \qquad (a)$$

wo sich die Zeichen entsprechen. Dabei ist [wegen (α')]

$$\sqrt{1-\mu^2} = -\frac{\sqrt{(1-\sqrt{a^2-c_2^2})^2-c_1^2}}{1-\sqrt{a^2-c_2^2}},$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = -\frac{c_1}{\sqrt{(1-\sqrt{a^2-c_2^2})^2-c_1^2}},$$

so dass

$$\left.\begin{aligned} y &= \mp \frac{c_1 x}{\sqrt{(1-\sqrt{a^2-c_2^2})^2-c_1^2}}, \\ z &= \pm \frac{c_2(1-\sqrt{a^2-c_2^2})x}{\sqrt{(1-\sqrt{a^2-c_2^2})^2-c_1^2}\sqrt{a^2-c_2^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{a}')$$

Die gesuchte Kurve ist demnach eine Gerade. Dabei muss für $x = x_2 : z = h$ sein.

Behalten wir in (a') die unteren Zeichen bei (was offenbar genügt), so hat man nun noch c_1, c_2, x_2 so zu bestimmen, dass

$$\int_0^{x_2} f\,dx = \text{Max. und } h = \frac{c_2(\sqrt{a^2-c_2^2}-1)x_2}{\sqrt{(\sqrt{a^2-c_2^2}-1)^2-c_1^2}\sqrt{a^2-c_2^2}}.$$

Aber

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{a^2-c_2^2}-1}{\sqrt{(\sqrt{a^2-c_2^2}-1)^2-c_1^2}},$$

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2} = -\frac{a(\sqrt{a^2-c_2^2}-1)}{\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{(\sqrt{a^2-c_2^2}-1)^2-c_1^2}};$$

$$\int_0^{x_2} f\,dx = \frac{\sqrt{a^2-c_2^2}-1}{\sqrt{(\sqrt{a^2-c_2^2}-1)^2-c_1^2}}\left[1-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-c_2^2}}\right]x_2$$
$$= \frac{\sqrt{a^2-c_2^2}-a^2}{c_2}h.$$

Da wir $h > 0$ nehmen, so haben c_2 und x_2 gleiches Zeichen.

In dem eben gefundenen Ausdruck kommt c_1 nicht vor; eine nähere Bestimmung dieser Grösse ist also nicht möglich. Bestimmen wir dann c_2 so, dass dieselbe ein Maximum ist, so haben wir

$$\frac{-a^2+a^2\sqrt{a^2-c_2^2}}{c_2^2\sqrt{a^2-c_2^2}} = 0,$$

welcher Gleichung, da nicht $a = 0$, eben so nicht $1 = \sqrt{a^2 - c_2^2}$, nicht genügt werden kann. Die Aufgabe hat also keine Auflösung.

2. Aufgabe zu §. 3, VIII.

II. Unter allen ebenen, auf dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem bezogenen Kurven die zu finden, für welche in jedem Punkte $y(x-y)$ ein Maximum ist (grösser ist, als für irgend eine andere bei demselben x).

Da

$$\frac{d}{dx}[y(x-y)] = y + (x-2y)y'; \; y(x-y) = \int [y + (x-2y)y']\,dx,$$

so kann man auch

$$\int_a^x [y + (x-2y)y']\,dx$$

zu einem Maximum machen, wo a eine (beliebige, aber) unveränderliche Grösse, die obere Grenze x dagegen zwar willkürlich, aber für unsere dermalige Betrachtung als fest anzusehen ist. Dabei ist aber der Werth von y für die obere Grenze nicht als gegeben anzusehen.

Die Gleichung (1) des §. 3 ist hier identisch erfüllt, indem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 2y', \; \frac{\partial f}{\partial y'} = x - 2y, \; \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 1 - 2y'.$$

Aber in §. 3 hatte man jetzt nicht das Recht

$$Z \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y = 0$$

zu setzen, weil nicht $\delta y = 0$ war; also muss noch

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \; x - 2y = 0, \; y = \tfrac{1}{2}x$$

sein (allerdings eigentlich nur an der oberen Grenze, also doch für jedes x). Die gesuchte Kurve hat also zur Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}x.$$

Wie bereits in §. 3, VIII. bemerkt, gehört diese Aufgabe nicht hierher. Sie kann auch ganz nach der elementaren Theorie der Maxima und Minima gelöst werden, wenn man x fest denkt und nach y differenzirt.

3. Andere Aufgaben dieser Art (zu §. 12, VI.).

III. Von den festen Punkten A und B, die in der Abszissenaxe liegen, sind Senkrechte auf letztere gezogen. Man soll eine Kurve suchen so, dass wenn man in einem beliebigen Punkte M derselben eine Tangente zieht, welche die vorhin genannten Senkrechten in R und S trifft, das Product $AR.BS$ grösser sei, als für jede andere durch M gehende Kurve.

Sind x, y die (als fest angesehenen) Koordinaten von M, so findet sich sofort

$$AR.BS = (y - xy')\,[y + (a - x)\,y'],$$

wenn man A als Koordinatenanfang, $AB = a$ annimmt. Hier bleibt also blos y' willkürlich (für die verschiedenen durch M gehenden Kurven) und man wird also y' (als Funktion von x und y) so bestimmen, dass obiges Produkt ein Maximum.

Die zwei ersten Differentialquotienten (nach y') desselben sind:

$$ay - 2axy' + 2x\,(xy' - y); \quad - 2ax + 2x^2.$$

Also muss

$$ay - 2axy' + 2x\,(xy' - y) = 0$$

sein, d. h.

$$2x(x-a)y' - (2x-a)y = 0,\; l(y) = c + \int \frac{2x-a}{2x(x-a)}dx$$
$$= c + \tfrac{1}{2}l\,[x(x-a)],$$

so dass

$$y^2 = cx\,(x - a)$$

die Gleichung der Kurve ist, wobei c ganz beliebig bleibt. Die Grösse

$$- 2ax + 2x^2 = 2x\,(x - a)$$

ist (bei positivem x) negativ, insofern $x < a$, also insofern M zwischen den beiden Senkrechten liegt. Insoweit hat man ein Maximum.

IV. Unter allen Kurven, für welche $\frac{xy}{y'} - x^2$ denselben Werth A hat, diejenige zu suchen, für welche das aus einer Normale und den beiden Koordinatenaxen gebildete Dreieck ein M. M. ist.

Die Gleichung der Normale ist

$$(Y - y)\, y' + X - x = 0;$$

dieselbe schneidet die Axen in den Punkten:

$$x + yy',\ 0;\quad 0,\ y + \frac{x}{y'},$$

so dass das fragliche Dreieck gleich

$$\tfrac{1}{2}(x + yy')\left(y + \frac{x}{y'}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{(x + yy')^2}{y'}$$

ist. Die Gleichung

$$\frac{xy}{y'} - x^2 = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

bestimmt y als Funktion von x mit einer willkürlichen Konstanten c; diese muss nun so bestimmt werden, dass (bei jedem x)

$$\frac{(x + yy')^2}{y'} \text{ ein M. M.}$$

wird. Dazu gehört, dass

$$\frac{2(x + yy')}{y'}\left(y\frac{\partial y'}{\partial c} + y'\frac{\partial y}{\partial c}\right) - \frac{(x + yy')^2}{y'^2}\frac{\partial y'}{\partial c} = 0,$$

während zugleich wegen (b):

$$\frac{x}{y'}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{xy}{y'^2}\frac{\partial y'}{\partial c} = 0,\ \frac{\partial y'}{\partial c} = \frac{y'}{y}\frac{\partial y}{\partial c},$$

so dass

$$(x + yy')\left[4\frac{\partial y}{\partial c} - (x + yy')\frac{1}{yy'}\frac{\partial y}{\partial c}\right] = 0.$$

Hieraus entweder

$$x + yy' = 0, \quad \text{oder} \quad 4yy' - (x + yy') = 0.$$

Die erste Gleichung liefert

$$x^2 + y^2 = c,$$

die zweite

$$3y^2 - x^2 = c.$$

Da die (b) zugleich erfüllt sein muss, so bestimmt sich jeweils c, und zwar im ersten Falle $c = -A$; im zweiten $c = +A$.

Uebrigens findet sich aus (b):

$$y^2 = c(A + x^2), \quad yy' = cx,$$

also

$$\frac{(x+y\,y')^2}{y'} = \frac{(1+c)^2 x^2 y}{c x} = \frac{(1+c)^2}{c} x y = \pm \frac{(1+c)^2}{\sqrt{c}} x \sqrt{A+x^2},$$

was zweimal nach c differenzirt gibt

$$\pm \frac{1+c}{2c\sqrt{c}} (3c-1) x \sqrt{A+x^2}, \ \pm \frac{\sqrt{c}}{2c^3} [\tfrac{3}{2}c^2 - c + \tfrac{3}{2}].$$

Setzt man Ersteres Null, so ist

$$\text{entweder } 1+c=0, \ \text{ oder } 3c-1=0.$$

Von diesen Gleichungen ist die erste unzulässig, da dann ja die Grösse, die ein M. M. werden sollte, zü Null wird; die zweite gibt $3c = 1$, also

$$\frac{\sqrt{c}}{2c^3}(\tfrac{3}{2}c^2 - c + \tfrac{3}{2}) = \frac{18}{\sqrt{3}}.$$

Demnach ist

$$3y^2 = A + x^2 \quad \text{. . . . .} \quad (c)$$

in der Lage, ein M. M. zu geben und zwar gibt

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}(A+x^2)} \text{ ein Minimum,}$$

$$y = -\sqrt{\tfrac{1}{3}(A+x^2)} \text{ ein Maximum.}$$

Da im Allgemeinen y (und auch y') positiv zu nehmen ist, so wird nur der erste dieser zwei Fälle zu beachten sein. Die Kurve (c) ist eine Hyperbel.

4. Kurve der grössten Geschwindigkeit.

V. In einer vertikalen Ebene sind zwei feste Punkte gegeben. Man soll in derselben eine durch diese Punkte gehende Kurve zeichnen, so beschaffen, dass wenn ein schwerer Punkt längs derselben herabfällt und dabei einen Widerstand in seiner (Bewegungs-) Richtung, proportional einer Funktion der Geschwindigkeit, erleidet, die Geschwindigkeit im Endpunkte ein Maximum sei.

Ist v_0 die Geschwindigkeit im Anfangspunkte ($x = 0$), v_1 die im Endpunkte ($x = b$), so ist

$$v_1 - v_0 = \int_0^b \frac{dv}{dx}\, dx$$

und man wird also letzteres Integral zu einem Maximum zu machen haben. Dabei nehmen wir die Axe der x zweckmässig vertikal im Sinne der Schwere an (b positiv, den Anfangspunkt der Koordinaten im Ausgangspunkte), da hier offenbar ein Zurückgehen der Kurve nach oben nicht zulässig ist.

Die Gleichung, welche v bestimmt (als Funktion von x) ist

$$v\frac{dv}{dx} = g - f(v)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(d)}$$

wenn $f(v)$ den Widerstand bezeichnet.

Wir werden nun die beiden Funktionen y und v, welche durch die vorige Gleichung verbunden sind, nach §. 13, II. bestimmen, wo

$$\psi = v' + \lambda\left[vv' - g + f(v)\sqrt{1 + y'^2}\right],$$

so dass ($y = y$, $z = v$):

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda\frac{f(v)\,y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right] = 0,\ \lambda\left[v' + f'(v)\sqrt{1 + y'^2}\right] - \frac{d}{dx}(1 + \lambda v) = 0.$$

Hieraus

$$\lambda f(v)\,y' = c\sqrt{1 + y'^2},\ -v\frac{d\lambda}{dx} + \lambda f'(v)\sqrt{1 + y'^2} = 0, \quad \text{(e)}$$

aus welchen Gleichungen, in Verbindung mit (d), v und y folgen sollen.

Hieraus

$$\lambda = c\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y' f(v)},$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = c\left[\frac{y'^2 y''}{\sqrt{1+y'^2}} f(v) - \sqrt{1 + y'^2}\left(y'' f(v) + y' f'(v)\frac{dv}{dx}\right)\right]\frac{1}{y'^2 f(v)^2},$$

$$\frac{f(v)}{c}\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{y''}{y'^2\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{1}{y'}\frac{dv}{dx}\sqrt{1 + y'^2}\,\frac{f'(v)}{f(v)}.$$

Weiter aus (e):

$$\frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{vy'}{c(1 + y'^2)}\frac{d\lambda}{dx},$$

also

$$\left(\frac{f(v)}{c} + \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\frac{v}{c}\frac{dv}{dx}\right)\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{y''}{y'^2\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$\left(f(v)\sqrt{1+y'^2} + v\frac{dv}{dx}\right)\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{cy''}{y'^2},$$

d. h. wegen (d):

$$g\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{cy''}{y'^2},\quad g\lambda = \frac{c}{y'} + c_1 \quad \ldots \ldots \quad \text{(f)}$$

Somit hat man zur Bestimmung von v und y:

$$v\frac{dv}{dx} = g - f(v)\sqrt{1+y'^2},\quad \frac{y'f(v)}{g}\left(\frac{c}{y'} + c_1\right) = c\sqrt{1+y'^2} \quad \text{(g)}$$

Der weiteren Durchführung wollen wir uns enthalten, da sie keine besondere Schwierigkeiten darbietet, die Aufgabe auch von keinem besonderen Belange ist.



